



Übungslektion 8 – Bäume & Heaps

Informatik II

14. April 2026

Willkommen!

Polybox



Passwort: jschul

Personal Website



https://jschultev.github.io/personal_website/

Heutiges Programm

Wiederholung von Kursinhalten

Prüfungsaufgaben

Hausaufgaben

1. Wiederholung von Kursinhalten

Ein *Baum* ist

- Verallgemeinerte Liste: Knoten können mehrere Nachfolger haben.
- Spezieller Graph: Graphen bestehen aus Knoten und Kanten. Ein Baum ist ein zusammenhängender, gerichteter, azyklischer Graph.

Binäre Bäume

Ein *binärer Baum* ist

- entweder ein Blatt, d.h. ein leerer Baum,
- oder ein innerer Knoten mit zwei Bäumen T_l (linker Teilbaum) und T_r (rechter Teilbaum) als linken und rechten Nachfolger.

In jedem inneren Knoten v wird gespeichert

- ein Schlüssel $v.\text{key}$ und
- zwei Zeiger $v.\text{left}$ und $v.\text{right}$ auf die Wurzeln der linken und rechten Teilbäume.

Ein Blatt wird durch den null-Zeiger repräsentiert. Um überfüllte Diagramme zu vermeiden, lassen wir beim Zeichnen von Bäumen manchmal die Kanten zu den Blättern weg.

Arten von Binären Bäumen

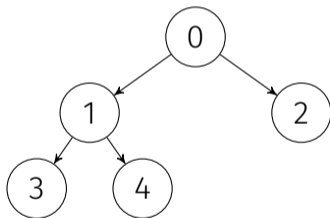
Es gibt drei Arten von Binärbäumen basierend auf der **Anzahl der Kinder**:

- Voller Binärbaum
- Vollständiger Binärbaum
- Perfekter Binärbaum

Hinweis: In der Literatur existieren verschiedene Bezeichnungen und Definitionen!

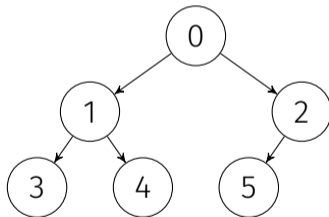
Voller Binärbaum

Ein Binärbaum ist ein voller Binärbaum, wenn jeder Knoten 0 oder 2 Kinder hat.



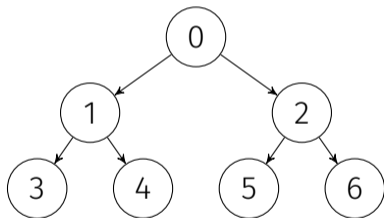
Vollständiger Binärbaum

Ein vollständiger Binärbaum ist ein Baum, in dem alle Ebenen vollständig gefüllt sind, ausser möglicherweise die letzte Ebene, die von links nach rechts gefüllt ist.



Perfekter Binärbaum

Ein Binärbaum ist ein Baum, bei dem alle inneren Knoten zwei Kinder haben und alle Blätter auf derselben Ebene sind.



Binäre Bäume: Quiz

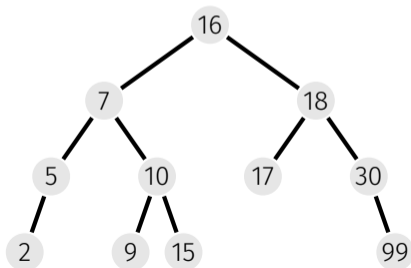
Wie viele Knoten enthält ein voller Binärbaum mit 6 Nicht-Blatt-Knoten höchstens:

- A. 6 Knoten
- B. 9 Knoten
- C. 11 Knoten
- D. 13 Knoten

Binäre Suchbäume

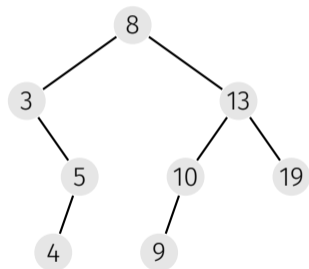
Ein *binärer Suchbaum* ist ein binärer Baum, der die **Suchbaumeigenschaft** erfüllt:

- Jeder Knoten v speichert einen Schlüssel
- Schlüssel im linken Teilbaum $v.\text{left}$ kleiner als $v.\text{key}$
- Schlüssel im rechten Teilbaum $v.\text{right}$ grösser als $v.\text{key}$



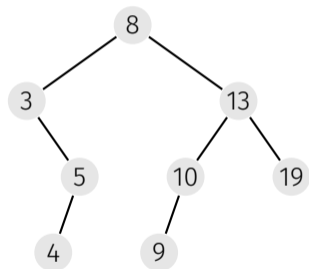
Traversierungsarten

- *Hauptreihenfolge (preorder)*:
 v , dann $T_{\text{left}}(v)$, dann $T_{\text{right}}(v)$.



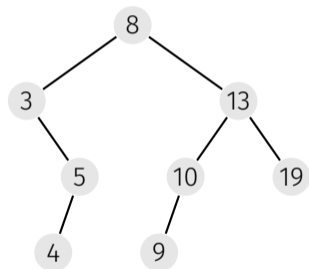
Traversierungsarten

- *Hauptreihenfolge (preorder)*:
 v , dann $T_{\text{left}}(v)$, dann $T_{\text{right}}(v)$.
8, 3, 5, 4, 13, 10, 9, 19



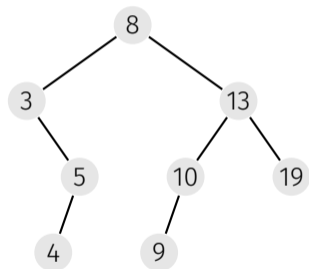
Traversierungsarten

- *Hauptreihenfolge (preorder)*:
 v , dann $T_{\text{left}}(v)$, dann $T_{\text{right}}(v)$.
8, 3, 5, 4, 13, 10, 9, 19
- *Nebenreihenfolge (postorder)*:
 $T_{\text{left}}(v)$, dann $T_{\text{right}}(v)$, dann v .



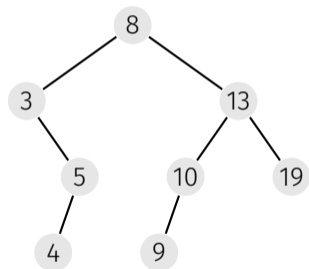
Traversierungsarten

- *Hauptreihenfolge (preorder)*:
 v , dann $T_{\text{left}}(v)$, dann $T_{\text{right}}(v)$.
8, 3, 5, 4, 13, 10, 9, 19
- *Nebenreihenfolge (postorder)*:
 $T_{\text{left}}(v)$, dann $T_{\text{right}}(v)$, dann v .
4, 5, 3, 9, 10, 19, 13, 8



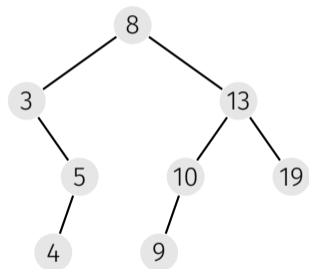
Traversierungsarten

- **Hauptreihenfolge (preorder):**
 v , dann $T_{\text{left}}(v)$, dann $T_{\text{right}}(v)$.
8, 3, 5, 4, 13, 10, 9, 19
- **Nebenreihenfolge (postorder):**
 $T_{\text{left}}(v)$, dann $T_{\text{right}}(v)$, dann v .
4, 5, 3, 9, 10, 19, 13, 8
- **Symmetrische Reihenfolge (inorder):**
 $T_{\text{left}}(v)$, dann v , dann $T_{\text{right}}(v)$.



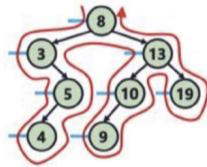
Traversierungsarten

- *Hauptreihenfolge (preorder)*:
 v , dann $T_{\text{left}}(v)$, dann $T_{\text{right}}(v)$.
8, 3, 5, 4, 13, 10, 9, 19
- *Nebenreihenfolge (postorder)*:
 $T_{\text{left}}(v)$, dann $T_{\text{right}}(v)$, dann v .
4, 5, 3, 9, 10, 19, 13, 8
- *Symmetrische Reihenfolge (inorder)*:
 $T_{\text{left}}(v)$, dann v , dann $T_{\text{right}}(v)$.
3, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 19

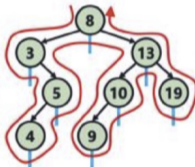


Beispiel aus ZF

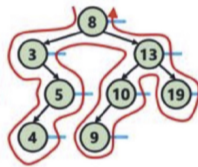
Trick um Traversierungsreihenfolge schneller zu bestimmen:



Preorder: path touches line in following order:
8, 3, 5, 4, 13, 10, 9, 19



Inorder: path touches line in following order:
3, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 19



Postorder: path touches line in following order:
4, 5, 3, 9, 10, 19, 13, 8

Traversierungsarten: Quiz

Zeichnen Sie jeweils einen binären Suchbaum, der die folgenden Traversierungen erzeugt. Ist der Baum eindeutig?

Symmetrische Reihenfolge (inorder)	1 2 3 4 5 6 7 8
Hauptreihenfolge (preorder)	4 3 1 2 8 6 5 7
Nebenreihenfolge (postorder)	1 3 2 5 6 8 7 4

Geben Sie zu jeder Reihenfolge eine Zahlensequenz aus $\{1, \dots, 4\}$, die nicht aus einem gültigen binären Suchbaum stammen kann.

Heaps

Ein *Heap* ist eine baumbasierte Datenstruktur wobei:

- Der Baum ein **vollständiger Binärbaum** ist.
- Ein Heap mit **N** Knoten eine Höhe von **$\log N$** hat (Eigenschaft eines vollständigen Binärbaums).
- Es ist für die schnelle Extraktion von Minimum oder Maximum und für das Sortieren optimiert.

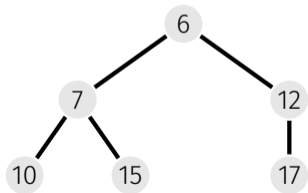
Es gibt zwei Arten von Heap-Implementierungen:

- Min-Heaps
- Max-Heaps

Min-Heaps

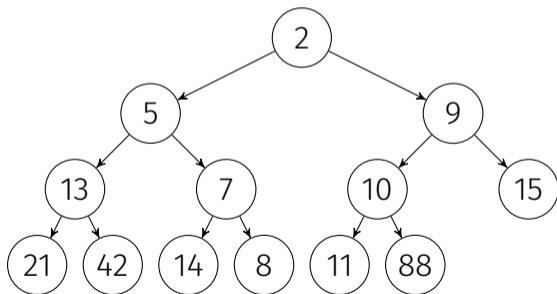
Ein *Min-Heap* ist ein binärer Baum wo:

- Der am Wurzelknoten vorhandene Schlüssel ist immer **kleiner oder gleich** den Schlüsseln aller seiner Kinder.
- Dieselbe Eigenschaft muss für alle Teilbäume in diesem Binärbaum rekursiv wahr sein.
- Das **kleinste** Schlüsselement ist daher immer an der Wurzel vorhanden.



Min-Heaps: Quiz

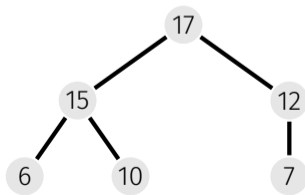
Führen Sie auf folgendem Min-Heap eine Extract-Min (entferne den kleinsten Schlüssel) Operation aus, wie in der Vorlesung vorgestellt, einschliesslich der Wiederherstellung der Heap-Bedingung. Wie sieht der Heap nach der Operation aus?



Max-Heaps

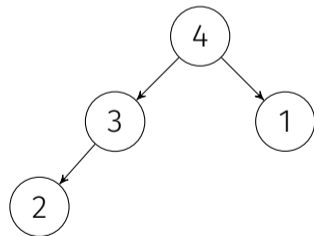
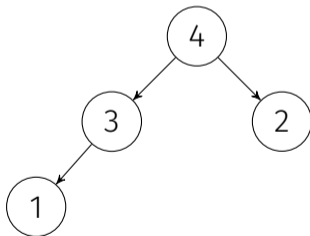
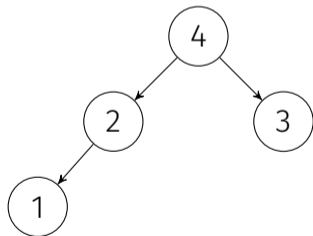
Ein *Max-Heap* ist ein binärer Baum wo:

- Der am Wurzelknoten vorhandene Schlüssel ist immer **größer oder gleich** den Schlüsseln aller seiner Kinder.
- Dieselbe Eigenschaft muss für alle Teilbäume in diesem Binärbaum rekursiv wahr sein.
- Das **größte** Schlüsselement ist daher immer an der Wurzel vorhanden.



Anzahl Max-Heaps

Sei $N(n)$ die Anzahl verschiedener Max-Heaps, welche aus allen Schlüsseln $1, 2, \dots, n$ gebildet werden können. Beispielsweise ist $N(1) = 1$, $N(2) = 1$, $N(3) = 2$, $N(4) = 3$ und $N(5) = 8$.
Finde die Werte $N(6)$ und $N(7)$.



Komplexitätsanalyse von Min-Heap und Max-Heap

- Erhalten des größten oder kleinsten Elements:
- Element in Max-Heap oder Min-Heap einfügen:
- Größte- oder Kleinste-Element entfernen:

SiftDown und SiftUp

Schlüssel Einfügen

Binärer Suchbaum

- Nach Schlüssel suchen.
- Bei erreichtem leeren Blatt (`null`) einfügen.

Min-Heap

- Zuhinterst im Array einfügen.
- Heap-Bedingung wiederherstellen: `siftUp` (Aufsteigen lassen).

Schlüssel Einfügen

Binärer Suchbaum

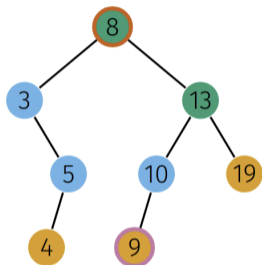
- Nach Schlüssel suchen.
- Bei erreichtem leeren Blatt (`null`) einfügen.

Min-Heap

- Zuhinterst im Array einfügen.
- Heap-Bedingung wiederherstellen: `siftUp` (Aufsteigen lassen).

Aufgabe: Einfügen von 4, 8, 16, 1, 6, 7 in leeren Baum/Heap.

Symmetrischer Nachfolger



Knoten v hat zwei Kinder

Anforderungen an den Ersatzknoten w :

1. $w.key$ ist grösser als alle in Schlüssel in $v.left$
2. $w.key$ ist kleiner als alle in Schlüssel in $v.right$
3. hat idealerweise keine Kinder

Beobachtung: Der kleinste Schlüssel im rechten Teilbaum $v.right$ (hier: 9) erfüllt Bedingungen 1, 2; und hat maximal ein (rechtes) Kind.

Lösung: Ersetze v durch ebenjenen **symmetrischen Nachfolger**.

Schlüssel Löschen

Binärer Suchbaum

- Schlüssel k durch symm. Nachfolger n ersetzen.
- Achtung: Wohin mit rechtem Kind von n ?

Min-Heap

- Schlüssel durch hinterstes Arrayelement ersetzen.
- Heap-Bedingung wiederherstellen: `siftDown` oder `siftUp`.

Schlüssel Löschen

Binärer Suchbaum

- Schlüssel k durch symm. Nachfolger n ersetzen.
- Achtung: Wohin mit rechtem Kind von n ?

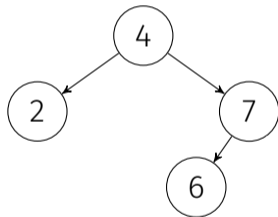
Min-Heap

- Schlüssel durch hinterstes Arrayelement ersetzen.
- Heap-Bedingung wiederherstellen: `siftDown` oder `siftUp`.

Aufgabe: Löschen von 4 in Beispiel-Baum/Heap.

Schlüssel Löschen: Quiz

Wenn Sie zwei Schlüssel aus einem Binären Suchbaum löschen wollen, spielt es dann eine Rolle, in welcher Reihenfolge Sie dies tun? Mit anderen Worten, ist das Löschen kommutativ?



2. Prüfungsaufgaben

Alte Prüfungsaufgaben

In der folgenden Tabelle ist ein Min-Heap in seiner üblichen Form gespeichert. Wie sieht die Tabelle aus, nachdem die Zahl 17 eingefügt wurde?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	9	7	25	23	32	26	48	37	39	39	37

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>

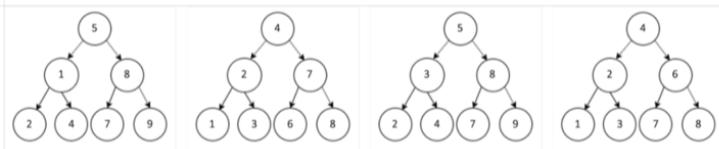
Angenommen, ein bestimmter binärer Suchbaum hat ganze Zahlen zwischen 1 und 10 als Schlüssel und wir suchen nach der Zahl 5. Welche der folgenden Sequenzen können **nicht** die untersuchte Schlüsselfolge sein?

- 10, 9, 8, 7, 6, 5
- 4, 10, 8, 7, 3, 5
- 1, 10, 2, 9, 3, 8, 4, 7, 6, 5
- 2, 7, 3, 8, 4, 5

Binärbaum

2.b)

Nach einer Traversierung eines Baumes mit der Preorder Reihenfolge bekommen wir die Elemente: 4, 2, 1, 3, 7, 6, 8. Welche der folgenden Abbildungen entspricht dem tatsächlichen Baum? / *A preorder traversal of a tree yields: 4, 2, 1, 3, 7, 6, 8. Which of the following figures correspond to the actual tree?*



(A)

(B)

(C)

(D)



Binärbaum

Gegeben ein perfekt balancierter binärer Suchbaum mit n Elementen, was ist asymptotisch die schlechtest mögliche Anzahl Vergleiche um das Element mit dem kleinsten Wert zu finden, mit der besten Ihnen bekannten Methode?

Given a perfectly balanced Binary Search Tree with n elements, what is the asymptotical worst case number of comparisons for finding the minimum value element, using the best method you know?

Anzahl Vergleiche? / *Number of comparisons?*

- $\log n$ \sqrt{n} n $n \log n$ n^2 e^n $n!$

Binärbaum

Gegeben ein Binärbaum mit 31 Elementen.
Was ist die Minimale/Maximale Baumtiefe?

*Given a binary tree with 31 elements.
What is the minimal/maximal tree depth?*

.....(3.c.1).....

Minimale Baumtiefe? / *Minimal tree depth?*

- 1 4 5 16 31 63

.....(3.c.2).....

Maximale Baumtiefe? / *Maximum tree depth?*

- 1 4 5 16 31 63

Binärbaum

1. Fügen Sie den Schlüssel 16 in den Baum ein.

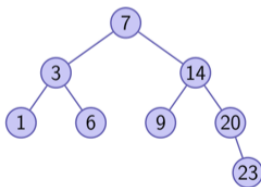
2. Löschen Sie den Schlüssel 14. Nutzen Sie hierbei den symmetrischen Nachfolger, falls nötig.

Nach Durchführung aller Operationen, beantworten Sie die Fragen über den resultierenden Graph. Schreiben Sie NONE falls das Kind nicht existiert.

1. Insert the key 16 into the tree.

2. Delete the key 14. Use the symmetric successor, if needed.

After the operations are performed, answer the questions about the resulting graph. Enter NONE if the child does not exist.



Binärbaum

.....(3.e.1).....

Was ist der Wert des rechten Kind von 7? / *What is the value of 7's right child?*

.....(3.e.2).....

Was ist der Wert des rechten Kind von 16? / *What is the value of 16's right child?*

.....(3.e.3).....

Was ist der Wert des linken Kind von 20? / *What is the value of 20's left child?*

Heaps

Das folgende Array a repräsentiert einen Min-Heap. Zeigen Sie das resultierende Array a nachdem Sie das Minimum extrahieren und die Heap-Bedingung wieder hergestellt haben.

The following array a represents a min-heap. Show the resulting array a after you extract the minimum and reestablish the heap-condition.

1	3	2	6	5	4	9	11	8	13	7
										-

Tragen Sie die Lösung in Moodle Komma-getrennt ohne Leerschläge ein, also zum Beispiel 0,1,2. / *Enter the solution in Moodle comma-separated without spaces, e.g., 0,1,2.*

3. Hausaufgaben

Übung 7: Trees

Auf <https://expert.ethz.ch/enrolled/SS26/mavt2/exercises>

Exercise 7: Trees **Einfach**, **Mittel**, **Schwer**

- **Binary Search Trees and Heaps** Gute Übung, ZF, Slides
- **Implementing a Binary Search Tree** Sehr gut für Verständnis!
- **Concatenating Heaps** Tricky, achtet auf Definitionen
- **Heapsort** Vorlesung / ZF zur Hilfe

KEINE HARDCODIERUNG

Feedback



https://jschultev.github.io/personal_website/Feedback