

PVK

Fluid Dynamics: Advanced

Johannes Schulte-Vels

Juni 2026

Vorbemerkung

Dieses Skript wurde für den PVK 2026 in *Fluid Dynamics: Advanced* erstellt. Es ist ausdrücklich nicht als Ersatz für das offizielle Skript der Vorlesung gedacht, auch wenn es zusammen mit dem anderen Kursmaterial als einzige Quelle für den PVK gilt.

Die wichtigste Grundlage für die Prüfung ist, dass ihr das offizielle Skript gelesen habt und euch darin zurechtfindet. Während der Prüfung dient es als eure einzige Informationsquelle und ist deshalb zentral für die Vorbereitung und das Verständnis des Fachs.

Es war deshalb schwierig, eine gute Struktur und ein Ziel für den PVK zu finden, wenn es ja eigentlich auch das offizielle Skript gibt. Generell sollen der PVK und dieses Skript euch aber dabei helfen, die wichtigsten Inhalte besser zu verstehen, typische Fehler zu vermeiden und Prüfungsaufgaben gezielt zu üben. Ich habe versucht, möglichst viele Verweise auf das offizielle Skript einzubauen, damit ihr nachvollziehen könnt, wo die jeweiligen Konzepte behandelt werden. Es sind die kleinen geschwungenen Pfeile rechts, die sich **immer** auf das offizielle Skript beziehen.

↔ Kap. X, S. 123

Ich habe auch einige Aufgaben mit Lösungen eingearbeitet, damit die Inhalte direkt angewendet werden können.

Generell sollte sich das Skript auch gut ohne PVK durcharbeiten lassen. Ich werde deshalb auch noch eine Version ohne Lösungen hochladen. Mehr Unterlagen als auf AMIV findet ihr ausserdem auf meiner Website (https://jschultev.github.io/personal_website/) und meiner Polybox (<https://polybox.ethz.ch/index.php/s/KM9zLTfTXHypFES>, PW: jschul).

Am Ende findet ihr ausserdem eine ca. 20 seitige Sammlung von Multiple-Choice und Clicker-Fragen zum Üben. Dafür habe ich unter anderem die Datei von Vasilisa Kirsanova verwendet, die selbst auch ein Anki-Set auf AMIV zur Verfügung stellt. Ich habe zusätzlich versucht, die MC Fragen jeweils mit passenden Stellen aus dem offiziellen Skript zu verknüpfen, auch wenn das nicht immer so eindeutig möglich ist.

Wie immer: Auch ich mache Fehler und übernehme keine Haftung für Vollständigkeit oder Korrektheit. Falls ihr Unstimmigkeiten findet oder etwas unklar ist, meldet euch gerne bei mir!

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkung	1
0.1 Vorbereitung	4
1 Turbulenz	5
1.1 Phänomenologie	5
1.2 Transition	5
1.3 Statistische Modellierung	6
1.4 Turbulenter Impulstransport	6
1.5 Turbulente Grenzschicht und Wandgesetz	7
1.6 Turbulente Rohrströmung und Druckverlust	9
1.7 Verlustbehaftete Bernoulli-Gleichung	11
2 Potentialströmungen	16
2.1 Phänomenologie	16
2.2 Laplace-Gleichung und Superposition	16
2.3 Zirkulation und Quellstärke	18
2.4 Stromfunktion	18
2.5 Komplexes Potential	19
2.6 Elementarlösungen	20
2.7 Spiegelung an einer Wand	22
2.8 Körper aus Überlagerungen	23
2.9 Zylinderumströmung mit Zirkulation	23
2.10 Auftriebsformel von Kutta-Joukowski	24
2.11 Konforme Abbildung	25
2.12 Instationäre Potentialströmung und virtuelle Masse	25
3 Drehungsbehaftete Strömungen	34
3.1 Phänomenologie	34
3.2 Zirkulation	34
3.3 Wirbelstärkefeld	34
3.4 Analytische Wirbeltypen	35
3.5 Wirbellinien, Wirbelröhren und Wirbelfäden	36

3.6	Gesetz von Biot-Savart	36
3.7	Wirbeltransportgleichungen	37
3.8	Wirbelsätze	39
3.9	Tragflügel und induzierter Widerstand	40
3.9.1	Bodeneffekt	41
3.9.2	Wirbelringe	41
4	Kompressible Strömungen	48
4.1	Phänomenologie	48
4.2	Zustandsgrößen und Ruhegrößen	49
4.3	Senkrechter Verdichtungsstoss	50
4.4	Düse mit veränderlichem Querschnitt	53
4.5	Schiefer Verdichtungsstoss	55
4.6	Prandtl-Meyer-Expansion	56
4.7	Wellenwiderstand	58
4.8	Fanno-Strömung	58
A	Key Learnings	69
A.1	Turbulenz	69
A.2	Potentialströmungen	69
A.3	Drehungsbehaftete Strömungen	69
A.4	Kompressible Strömungen	69
B	Multiple-Choice-Fragen	70
B.1	Turbulenz	70
B.2	Potentialströmungen	73
B.3	Drehungsbehaftete Strömungen	81
B.4	Kompressible Strömungen	87
C	Clicker-Fragen	93

Überblick und Prüfungsstrategie

In diesem Kurs werden vier Hauptthemen behandelt: **Turbulenz**, **Potentialströmungen**, **drehungsbehaftete Strömungen** und **kompressible Strömungen**. Die Prüfung besteht vermutlich aus zwanzig Multiple-Choice Fragen und vier bis fünf Rechenaufgaben, die sich auf diese Themen verteilen.

0.1 Vorbereitung

In diesem Fach lohnt es sich wirklich, so viele Prüfungen wie möglich zu lösen und dabei das offizielle Skript immer besser kennenzulernen und zu verstehen. Dabei merkt man mit der Zeit auch, dass sich nicht nur viele Multiple-Choice Fragen, sondern meistens auch die Typen der grösseren Aufgaben wiederholen.

Wichtig ist, dass man die Formeln nicht auswendig können muss, sondern vor allem wissen sollte, wo sie im Skript zu finden sind. Ich würde deshalb generell empfehlen eng mit dem Skript arbeiten, es ausdrucken, und auch den Anhang gut kennenzulernen und regelmässig zu benutzen. Dort finden sich viele hilfreiche Formeln, beispielsweise zu Potentialströmungen, vor allem aber auch zu kompressiblen Strömungen sowie die dazugehörigen Tabellen. Gerade das Ablesen dieser Tabellen sollte man vorher ein paar Mal üben, damit man während der Prüfung nicht unnötig Zeit verliert.

Auch Konzepte oder typische Detailfragen sollte man sich direkt im Skript markieren, falls man sie für wichtig erachtet. Meiner Ansicht nach lohnt es sich dabei, verschiedene Arten von Informationen unterschiedlich, aber dennoch einheitlich zu markieren. Meine persönlichen Markierungen sind ungefähr wie folgt gegliedert:

- Formeln & Gleichungen (**orange**)
- Zusatzinformationen zu Konzepten (**gelb**)
- Extrem wichtige Dinge (**pink**)

Zusätzlich würde ich empfehlen, noch eine eigene Farbe für die Antworten auf MC-Fragen einzuführen und die entsprechenden Antworten direkt im Skript anzustreichen.

Die Multiple-Choice-Fragen können einem gerade am Anfang sehr schwierig erscheinen, da sie viele Konzepte des Kurses sehr genau abfragen. Mit der Zeit merkt man aber hoffentlich zwei Dinge: Erstens, dass sich die Fragen doch recht stark wiederholen, und zweitens, dass sich zunehmend ein Verständnis und eine Intuition für die behandelten Konzepte aufbauen. Viele Fragen kann man dann bereits deshalb sicher beantworten, weil man sie oder eine sehr ähnliche Frage schon einmal gesehen und verstanden hat.

Prüfungstipp

Bei den MC-Fragen geben falsch angekreuzte Antworten Punktabzug. Ich würde deshalb zunächst nur diejenigen Antworten ankreuzen, bei denen man sich sicher ist, und bei Unsicherheiten mit den restlichen Aufgaben weitermachen. Dort lassen sich die Punkte möglicherweise sicherer und schneller holen. Falls am Ende noch Zeit übrig ist, kann man zu den offenen MC-Fragen zurückkehren und sie nochmals genauer prüfen.

KAPITEL 1

Turbulenz

Dieses Kapitel ist meistens schwierig für Studierende, da es viele ungreifbare Mathematische Formeln beinhaltet. Ich habe es so gut es geht reduziert und probiert die Konzepte auszuarbeiten. Einige Informationen braucht es aber trotzdem, da sonst auch allfällige MC Aufgaben nicht gut gelöst werden können. Natürlich ist das ganze im offiziellen Skript noch deutlich detaillierter geschrieben. Anschauen, solltet ihr das ja sowieso!

↔ Kap. 8

1.1 Phänomenologie

Im Gegensatz zu laminaren Strömungen, bei denen sich das Fluid geordnet und in weitgehend parallelen Bahnen bewegt, sind turbulente Strömungen durch unregelmässige, räumlich und zeitlich schwankende Bewegungen gekennzeichnet.

Diese Schwankungen führen zu einer deutlich stärkeren Durchmischung sowie zu einem erhöhten Impuls-, Wärme- und Stofftransport. Gleichzeitig wird die Beschreibung der Strömung wesentlich schwieriger, da Geschwindigkeit und Druck nicht mehr nur vom Ort, sondern auch stark und scheinbar unregelmässig von der Zeit abhängen.

Notwendige Merkmale turbulenter Strömungen:

- **Instationär und unregelmässig:** zufällige zeitliche und räumliche Schwankungen
- **Dreidimensionale Geschwindigkeitsfluktuationen:** Ca. 10% - 30% der mittleren Geschwindigkeit
- **Rotationsbehaftet:** $\omega = \nabla \times \mathbf{u} \neq 0$

Charakteristische Eigenschaften turbulenter Strömungen:

- Wirbel auf verschiedenen Längenskalen
- Selbsterhaltend durch Energiezufuhr aus der mittleren Scherströmung
- Übergang von laminar zu turbulent: **Transition**
- Starker Impuls-, Wärme- und Stofftransport durch Wirbeldiffusion (ca. 100x stärker als molekulare Diffusion)
- Dissipation turbulenter Energie in Wärme

1.2 Transition

Transition hängt nicht nur von der kritischen Reynolds-Zahl ab, sondern auch von anderen Faktoren wie Geometrie.

Key Formula

Ebene Platte : $Re_{x,krit} \approx 3 \cdot 10^5 \dots 3 \cdot 10^6$,	$Re_x = \frac{ux}{\nu}$
Rohr : $Re_{D,krit} \approx 2300 \dots 3000$,	$Re_D = \frac{uD}{\nu}$.

1.3 Statistische Modellierung

Irgendwie würde man Turbulenz gerne modellieren können. Dazu zerlegt man die turbulente Geschwindigkeit in einen Mittelwert und eine Fluktuation (beachte, dass der Unterstrich für Vektoren steht):

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \langle \underline{u}(\underline{x}, t) \rangle + \underline{u}'(\underline{x}, t).$$

Dabei gilt für die gemittelte Fluktuation:

$$\langle \underline{u}'(\underline{x}, t) \rangle = 0.$$

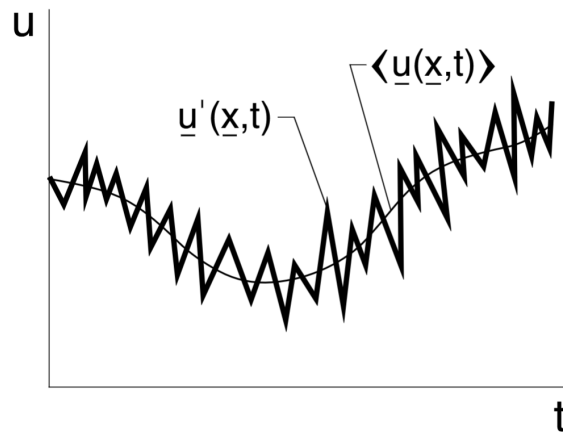


Abbildung 1.1: Signal einer turbulenten Geschwindigkeit

Die Mittelung kann unterschiedlich erfolgen (muss man nur kennen!):

- zeitlich,
- räumlich,
- über ein Ensemble unabhängiger Realisationen,
- über die Phasenzyklen einer periodischen Strömung.

1.4 Turbulenter Impulstransport

In einer laminaren Strömung wird Impuls durch die molekulare Bewegung des Fluids zwischen benachbarten Schichten übertragen. Dieser Anteil wird durch die molekulare Schubspannung beschrieben:

$$\tau^{\text{mol}} = \mu \frac{d\bar{u}}{dy}.$$

In einer turbulenten Strömung entsteht ein zusätzlicher Impulstransport, der als turbulente Schubspannung bezeichnet wird.

$$\tau^{\text{turb}} = -\rho \overline{u'v'}.$$

Die gesamte Schubspannung setzt sich damit aus beiden Anteilen zusammen:

$$\tau = \tau^{\text{mol}} + \tau^{\text{turb}}.$$

Die turbulente Schubspannung enthält allerdings unbekannte Fluktuationen, und sie muss deshalb modelliert werden. Ein einfacher Ansatz ist, sie analog zur molekularen Reibung zu beschreiben (**Boussinesq-Annahme**):

$$\tau^{\text{turb}} = -\rho \overline{u'v'} = \rho \nu_T \frac{d\bar{u}}{dy}.$$

Dabei ist ν_T die turbulente Viskosität. Sie ist anders als die molekulare Viskosität keine Stoffkonstante, sondern hängt vom Strömungszustand ab und muss empirisch bestimmt werden.

Der **Prandtlische Mischungsweg** ist solch ein empirischer Ansatz zur Bestimmung von ν_T :

$$\nu_T = l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right|.$$

Der Mischungsweg l beschreibt dabei näherungsweise, wie weit ein Turbulenzelement Impuls transportiert, bevor es sich mit seiner Umgebung vermischt.

↪ S. 47

Key Learning

$$\begin{aligned} \tau^{\text{mol}} &= \mu \frac{d\bar{u}}{dy} && : \text{Impulstransport durch Moleküle,} \\ \tau^{\text{turb}} &= \rho \nu_T \frac{d\bar{u}}{dy} && : \text{Impulstransport durch turbulente Fluidbewegungen.} \\ &&& \mu : \text{molekulare Viskosität (Stoffkonstante),} \\ &&& \nu_T : \text{turbulente Viskosität (nicht konstant),} \end{aligned}$$

1.5 Turbulente Grenzschicht und Wandgesetz

Direkt an der Wand verschwinden aufgrund der Haftbedingung die turbulenten Schwankungen. Deshalb gilt dort

$$\tau^{\text{turb}} = 0, \quad \tau_W = \tau^{\text{mol}}.$$

Mit zunehmendem Wandabstand nimmt der turbulente Impulstransport zu. Die turbulente Grenzschicht wird deshalb modellhaft in drei Bereiche unterteilt:

Key Learning

- **Wandbereich (viskose Unterschicht):**

$$\tau \approx \tau_W(x), \quad \tau^{\text{mol}} \gg \tau^{\text{turb}}.$$

- **Wandnahe Bereich (logarithmische Schicht):**

$$\tau \approx \tau_W(x), \quad \tau^{\text{turb}} \gg \tau^{\text{mol}}.$$

- **Aussenbereich:**

$$\tau = \tau(x, y), \quad \tau^{\text{turb}} \gg \tau^{\text{mol}}.$$

Zur Beschreibung werden die Schubspannungsgeschwindigkeit und die dimensionslosen Wandgrößen eingeführt:

$$u_\tau = \sqrt{\frac{|\tau_W|}{\rho}}, \quad u^+ = \frac{\bar{u}}{u_\tau}, \quad y^+ = \frac{u_\tau y}{\nu}.$$

In der viskosen Unterschicht gilt $y^+ < 5$.

In der logarithmischen Schicht gilt $y^+ > 30$.

Der Bereich $5 < y^+ < 30$ wird als Pufferschicht bezeichnet.

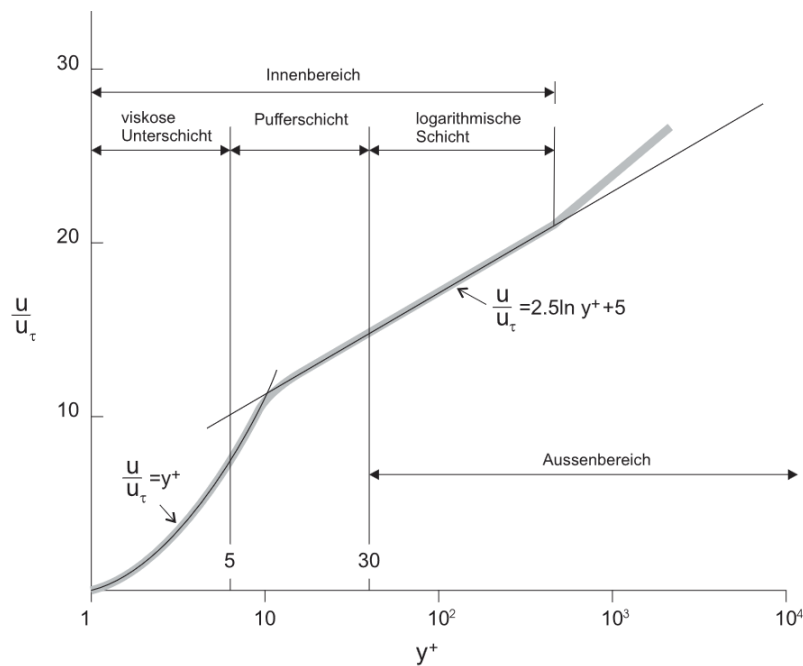


Abbildung 1.2: Wandgesetz der turbulenten Grenzschicht mit viskoser Unterschicht, Pufferschicht und logarithmischer Schicht.

Häufiger Fehler

Direkt an der Wand verschwindet nicht die gesamte Schubspannung, sondern nur der turbulente Anteil:

$$\tau^{\text{turb}} = 0, \quad \tau_W = \tau^{\text{mol}}.$$

Weiter von der Wand entfernt wird der Impulstransport zunehmend durch die turbulente Schubspannung getragen (also wird die molekulare Schubspannung unwichtiger).

Aufgabe: *Druckverlust im Rohr* (1.1)

1.6 Turbulente Rohrströmung und Druckverlust

In Rohrströmungen wirken Reibungskräfte, die dem Fluid Impuls entziehen, was zu einem Druckverlust führt, der mit der Länge L anwächst.

Bei turbulenten Strömungen sind die Schubspannungen (und damit der Druckverlust) deutlich höher als im laminaren Fall. Der Druckverlust Δp in einem Rohr der Länge L und Durchmesser D bei mittlerer Strömungsgeschwindigkeit $\bar{u}$ wird wie folgt beschrieben:

$$\frac{\Delta p}{\rho} = \lambda \frac{L}{D} \frac{\bar{u}^2}{2} \quad (1.1)$$

Die **Rohrreibungszahl** λ hängt von der Strömungsart ab:

Laminare Strömung ($Re_D < Re_{D,\text{krit}}$):

$$\lambda = \frac{64}{Re_D} \quad (1.2)$$

Turbulente Strömung Hier hängt λ nicht nur von Re , sondern auch von der äquivalenten Rauigkeitshöhe k_s des Rohrmaterials ab (gegeben im Skript). Massgeblich ist dabei der dimensionslose Wandabstand der Rauigkeit:

- **Hydraulisch glatt** ($u_\tau k_s / \nu \leq 5$): Die Rauigkeit liegt vollständig in der laminaren Unterschicht und hat keinen Einfluss:

$$\lambda = \lambda(Re_D)$$

- **Hydraulisch rau** ($u_\tau k_s / \nu \geq 70$): Die Reynolds-Zahl hat keinen Einfluss, λ hängt nur noch von der relativen Rauigkeit ab:

$$\lambda = \lambda\left(\frac{k_s}{R}\right)$$

- **Übergangsbereich** ($5 < u_\tau k_s / \nu < 70$):

$$\lambda = \lambda\left(Re_D, \frac{k_s}{R}\right)$$

Aus dem **Moody-Diagramm** kann man die Werte für λ ablesen.

Nichtrunde Querschnitte Für nichtrunde Rohre wird der **hydraulische Durchmesser**

$$D_H = 4 \cdot \frac{S}{U} \quad (1.3)$$

verwendet, wobei S die durchströmte Querschnittsfläche und U der benetzte Umfang (ohne freie Oberflächen) ist. Für ein kreisrundes Rohr ergibt sich erwartungsgemäss $D_H = D$.

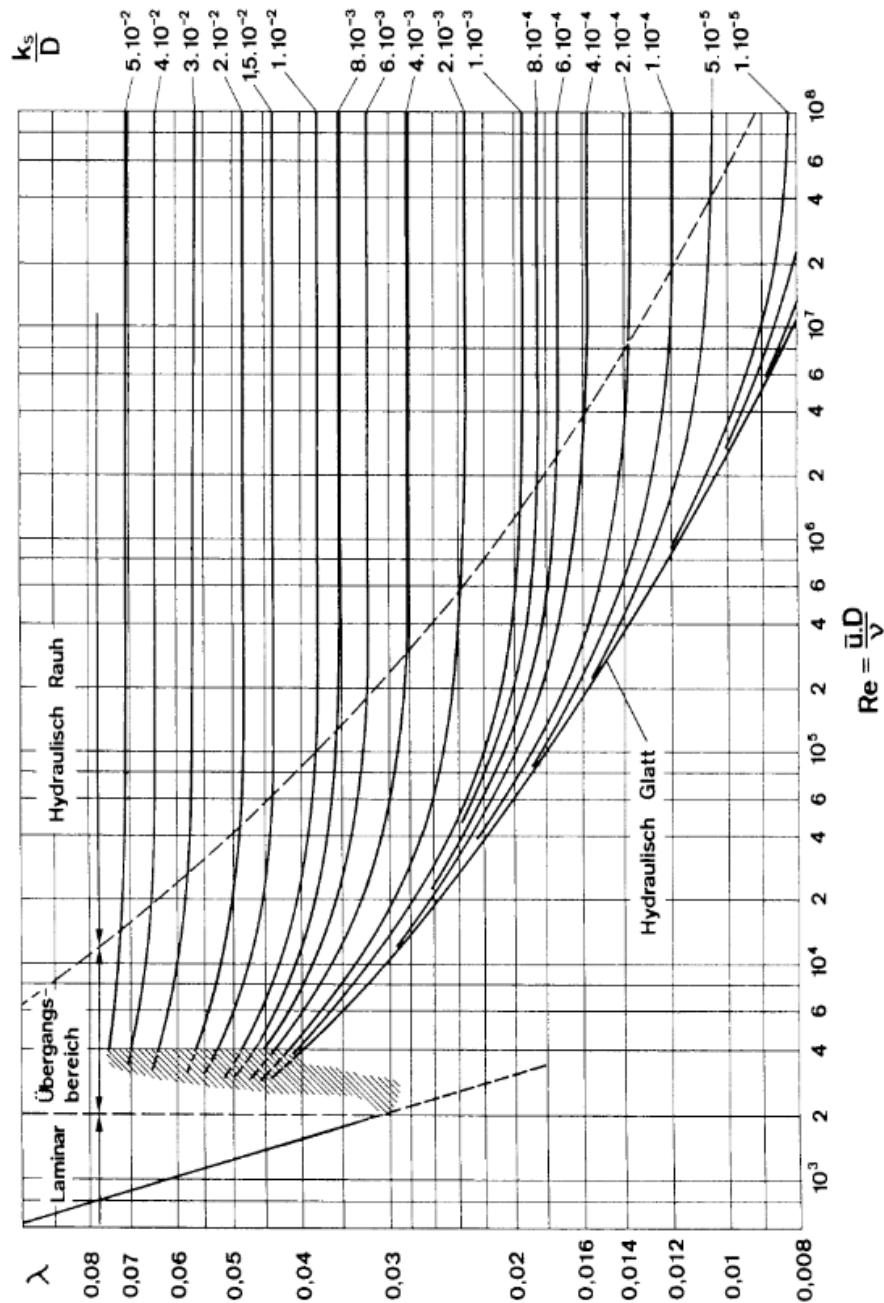


Abbildung 1.3: Moody-Diagramm: Rohrreibungszahl λ über Re_D für verschiedene relative Rauigkeiten.

1.7 Verlustbehaftete Bernoulli-Gleichung

Im Falle einer turbulenten Strömung kann die Bernoulli-Gleichung nicht direkt angewendet werden, jedoch ein ähnlicher Ausdruck:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho\bar{u}_1^2 + \rho gh_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho\bar{u}_2^2 + \rho gh_2 + \Delta p_{12} - \Delta p_{\text{ext}}.$$

Die mittlere Geschwindigkeit aus dem Massenstrom $\dot{m}$ und dem durchströmten Querschnitt S wird berechnet: $\bar{u} = \frac{\dot{m}}{\rho S}$.

Druckverlust

Der Term Δp_{12} ist die Summe aller Druckverluste zwischen den Punkten 1 und 2. Reibung und Einbauten sind mitunter daran schuld. Druckverluste durch Rohrreibung:

$$\frac{\Delta p}{\rho} = \lambda \frac{L}{D} \frac{\rho}{2} \bar{u}^2$$

Druckverluste durch Einbauten (z.B. Ventile, Bögen, etc.):

$$\frac{\Delta p}{\rho} = \zeta \frac{\rho}{2} \bar{u}^2$$

wobei der Verlustkoeffizient ζ von der Geometrie des Einbaus abhängt (und meistens gegeben ist).

Einflüsse Externe Maschinen

Externe Maschinen wie Pumpen oder Turbinen können dem System Energie zuführen oder entziehen, was den Term Δp_{ext} erklärt ($\Delta p_{\text{ext}} > 0 = \text{Zufuhr}$).

$$\Delta p_P = \frac{\eta N}{\dot{V}} \quad (\text{Pumpe}), \quad \Delta p_T = -\frac{N}{\eta \dot{V}} \quad (\text{Turbine})$$

N ist die Leistung der Maschine [Watt], η ihr Wirkungsgrad und $\dot{V}$ der Volumenstrom [$\frac{\text{m}^3}{\text{s}}$]

↪ S. 53

Key Formula

Verlustbehaftete Bernoulli-Gleichung:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho\bar{u}_1^2 + \rho gh_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho\bar{u}_2^2 + \rho gh_2 + \Delta p_{12} - \Delta p_{\text{ext}}.$$

$$\Delta p_{12} : \quad \frac{\Delta p}{\rho} = \lambda \frac{L}{D} \frac{\rho}{2} \bar{u}^2 \quad (\text{Rohr}) \quad \frac{\Delta p}{\rho} = \zeta \frac{\rho}{2} \bar{u}^2 \quad (\text{Einbauten})$$

$$\Delta p_{\text{ext}} : \quad \Delta p_P = \frac{\eta N}{\dot{V}} \quad (\text{Pumpe}) \quad \Delta p_T = -\frac{N}{\eta \dot{V}} \quad (\text{Turbine})$$

Aufgabe 1.1 – Einfluss des Druckabfalls (Prüfung FS2025, Aufgabe 1)

Die Strömung ist im zeitlichen Mittel stationär, rotationssymmetrisch und ausgebildet. Die Kontinuitätsgleichung lautet

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\bar{u}_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

und die x -Komponente der Impulsgleichung

$$\varrho \left[\bar{u}_r \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial r} + \frac{\bar{u}_\theta}{r} \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial \theta} + \bar{u}_x \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} \right] = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\bar{\tau}_{rx}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\tau}_{\theta x}}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xx}}{\partial x}, \quad (2)$$

wobei $\bar{\tau}_{ij}$ die mittleren Gesamtschubspannungen darstellt.

Welchen Einfluss hat der Druckabfall durch Reibung auf die Entwicklung der mittleren Strömungsgrößen? Bestimmen sie die richtigen Aussagen

- 1) Die mittlere axiale Geschwindigkeit $\bar{u}_x$ nimmt aufgrund der Dissipation in Hauptströmungsrichtung (x) ab.
- 2) Die mittlere Gesamtschubspannung $\bar{\tau}_{rx}$ nimmt entlang der x -Achse linear zu.
- 3) Die mittlere turbulente Schubspannung $\bar{\tau}_{rx}^{turb}$ bleibt konstant in x .
- 4) Der mittlere Gesamtschubspannung $\bar{\tau}_{rx}$ nimmt linear in r ab.

Lösung.

Folgende Vereinfachungen gelten aufgrund der gegebenen Annahmen:

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} = 0 \quad \text{mit} \quad \bar{u}_\theta = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} = 0 \quad \text{mit} \quad \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = \text{konst.}$$

Aus der Kontinuitätsgleichung folgt ausserdem $\bar{u}_r = 0$.

$$0 = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\bar{\tau}_{rx}).$$

Integration ergibt $r\bar{\tau}_{rx} = \frac{r^2}{2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + K$, und wegen $\bar{\tau}_{rx}(r=0)$ endlich folgt $K=0$, also:

$$\bar{\tau}_{rx} = \frac{r}{2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x}.$$

- 1) **Falsch.** Die Strömung ist ausgebildet: $\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} = 0$, also bleibt $\bar{u}_x$ konstant in x .
- 2) **Falsch.** $\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = \text{const}$, also ändert sich $\bar{\tau}_{rx}$ nicht entlang x .
- 3) **Richtig.** Da die Strömung ausgebildet ist, hängt nichts von x ab also auch nicht $\bar{\tau}_{rx}^{turb}$.
- 4) **Richtig.** Da $\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} < 0$, folgt, dass $\bar{\tau}_{rx} = \frac{r}{2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x}$ mit wachsendem r linear abnimmt.

Aufgabe 1.2 – Mittlerer Druckabfall in einem rauen Rohr (Prüfung FS2025, Aufgabe 1 (Forts.))

Durch ein gerades, raues Rohr mit Durchmesser D strömt Wasser inkompressibel, ausgebildet, turbulent und im Mittel stationär. Die äquivalente Rauigkeit ist k_S , die über den Querschnitt gemittelte Geschwindigkeit $\bar{U}$. Gegeben: $D = 0.1 \text{ m}$, $\varrho = 1000 \text{ kg/m}^3$, $\nu = 1 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, $\bar{U} = 1 \text{ m/s}$ und $k_S = 1 \times 10^{-4} \text{ m}$.

- a) Berechnen Sie den mittleren Druckabfall pro Meter $\frac{\Delta p}{L}$ (Moody-Diagramm).
- b) Ausgehend von einem Betriebspunkt $\text{Re}_D = 10^6$, $k_S/D = 10^{-2}$: welche Aussagen über die Strömungsparameter sind zutreffend?
- 1) Erhöhung der Reynolds-Zahl Re_D hat keinen Einfluss auf $\Delta p/L$.
 - 2) Reduktion der Viskosität ν hat keinen Einfluss auf $\Delta p/L$.
 - 3) Verdopplung der Geschwindigkeit $\bar{U}$ vervierfacht $\Delta p/L$.
 - 4) Verdopplung des Durchmessers D halbiert $\Delta p/L$.

Lösung.

- a) Reynolds-Zahl und relative Rauigkeit bestimmen:

$$\text{Re}_D = \frac{\bar{U} D}{\nu} = \frac{1 \cdot 0,1}{10^{-6}} = 10^5, \quad \frac{k_S}{D} = \frac{10^{-4}}{0,1} = 10^{-3}.$$

Aus dem Moody-Diagramm liest man ab:

$$\lambda \approx 0,022.$$

Einsetzen in die Druckverlustformel:

$$\frac{\Delta p}{L} = \lambda \frac{\varrho \bar{U}^2}{2D} = 0,022 \cdot \frac{10^3 \cdot 1^2}{2 \cdot 0,1} \approx 110 \text{ N/m}^3.$$

- b) Bei $\text{Re}_D = 10^6$ und $k_S/D = 10^{-2}$ liegt man im *hydraulisch rauen* Bereich des Moody-Diagramms. Dort ist $\lambda = \lambda(k_S/D)$ und unabhängig von Re_D .

$$\frac{\Delta p}{L} = \lambda \cdot \frac{\varrho \bar{U}^2}{2D}.$$

- 1) **Falsch.** Re_D lässt sich nicht ändern ohne gleichzeitig $\bar{U}$, D oder ν zu verändern – jede dieser Größen beeinflusst $\Delta p/L$ direkt. Aussage (a) suggeriert fälschlicherweise, dass Re_D eine unabhängige Stellgröße ist.
- 2) **Richtig.** $\Delta p/L$ ist keine Funktion von ν
- 3) **Richtig.** $\bar{U}$ kommt lediglich in der Druckverlustformel vor, und zwar quadratisch.
- 4) **Falsch.** Eine Verdopplung von D würde zwar den Faktor $1/D$ halbieren, aber gleichzeitig ändert sich $k_S/D \rightarrow k_S/(2D)$, d.h. λ ist nicht mehr konstant. Das einfache Skalierungsargument gilt also nicht.

Aufgabe 1.3 – Pipeline mit Pumpen und Druckverlusten (Prüfung, Rohrströmung)

Es soll eine $L = 1000$ km lange Pipeline von der Nordseeküste in die Schweiz gebaut werden. Die Höhendifferenz beträgt $\Delta h = 400$ m. Es soll die benötigte Anzahl Pumpen n bestimmt werden, um einen Massenstrom von $\dot{m} = 1000$ kg/s öl fördern zu können.

Der Durchmesser der Pipeline sei konstant und betrage $D_1 = 0.75$ m. Der Aussendruck am Anfang und Ende der Pipeline sei identisch. Das öl habe die Dichte $\varrho = 800$ kg/m³ und eine kinematische Viskosität von $\nu = 1 \times 10^{-5}$ m²/s. Die Rohre werden als hydraulisch glatt angenommen. Die Strömung sei verlustbehaftet.

- Bestimmen Sie die mittlere Geschwindigkeit U_1 , die Reynolds-Zahl Re_{D_1} und die Rohrreibungszahl λ_1 .
- Eine noch unbekannte Anzahl identischer Pumpen treibt die Strömung an. Jede Pumpe leistet $N = 0.5$ MW und arbeitet mit dem Wirkungsgrad $\eta = 0.95$. Bestimmen Sie den Druckgewinn Δp_P über eine Pumpe.
- Pro 1 km Pipeline wird ein Spezialeinbau mit Verlustkoeffizient $\zeta_{\text{th}} = 0.5$ benötigt. Pro installierter Pumpe werden zudem zwei Anschlüsse mit je $\zeta_A = 0.15$ und zwei Krümmer mit je $\zeta_K = 0.1$ eingesetzt. Bestimmen Sie die benötigte Anzahl Pumpen.

Lösung.

a) Aus der Massenerhaltung folgt

$$\dot{m} = \varrho A U_1 = \varrho \frac{\pi D_1^2}{4} U_1 \quad \Rightarrow \quad U_1 = \frac{4 \dot{m}}{\varrho \pi D_1^2} = \frac{4 \cdot 1000}{800 \pi \cdot 0.75^2} \approx 2.829 \text{ m/s.}$$

Die Reynolds-Zahl beträgt

$$\text{Re}_{D_1} = \frac{U_1 D_1}{\nu} = \frac{2.829 \cdot 0.75}{10^{-5}} \approx 2.1 \cdot 10^5.$$

Da das Rohr hydraulisch glatt ist, kann die Rohrreibungszahl aus dem Moody-Diagramm abgelesen werden:

$$\lambda_1 \approx 0.016.$$

b) Die Druckdifferenz über eine Pumpe ist gegeben durch

$$\Delta p_P = \frac{\eta N}{\dot{V}} = \frac{\varrho \eta N}{\dot{m}} \quad \Rightarrow \quad \Delta p_P = \frac{800 \cdot 0.95 \cdot 0.5 \cdot 10^6}{1000} = 3.8 \times 10^5 \text{ Pa.}$$

c) Die verlustbehaftete Bernoulli-Gleichung zwischen dem Anfangspunkt A und dem Endpunkt B lautet

$$p_A + \frac{\varrho}{2} \bar{u}_A^2 = p_B + \frac{\varrho}{2} \bar{u}_B^2 + \varrho g \Delta h + \Delta p_{AB} - \Delta p_{\text{ext}}.$$

Da der Rohrdurchmesser konstant ist und am Anfang und Ende derselbe Druck herrscht, gilt

$$\bar{u}_A = \bar{u}_B = U_1, \quad p_A = p_B.$$

Der Druckgewinn durch alle Pumpen beträgt

$$\Delta p_{\text{ext}} = n \Delta p_P.$$

Die Rohrreibungsverluste sind

$$\Delta p_R = \lambda_1 \frac{L}{D_1} \frac{\varrho U_1^2}{2}.$$

Die Verluste durch die 1000 Spezialeinbauten betragen

$$\Delta p_{th} = 1000 \zeta_{th} \frac{\varrho U_1^2}{2}.$$

Pro Pumpe entstehen durch zwei Anschlüsse und zwei Krümmer die Verluste

$$\Delta p_{A+K} = n (2\zeta_A + 2\zeta_K) \frac{\varrho U_1^2}{2}.$$

Damit folgt

$$n \Delta p_P = \varrho g \Delta h + \frac{\varrho U_1^2}{2} \left[\lambda_1 \frac{L}{D_1} + 1000 \zeta_{th} + 2n \zeta_A + 2n \zeta_K \right].$$

Die von n abhängigen Terme werden auf die linke Seite gebracht:

$$n \left[\Delta p_P - \varrho U_1^2 (\zeta_A + \zeta_K) \right] = \varrho g \Delta h + \frac{\varrho U_1^2}{2} \left[\lambda_1 \frac{L}{D_1} + 1000 \zeta_{th} \right].$$

Somit

$$n = \frac{\varrho g \Delta h + \frac{\varrho U_1^2}{2} \left[\lambda_1 \frac{L}{D_1} + 1000 \zeta_{th} \right]}{\Delta p_P - \varrho U_1^2 (\zeta_A + \zeta_K)}.$$

Einsetzen der Werte ergibt

$$n \approx 193.$$

KAPITEL 2

Potentialströmungen

Dieses Kapitel ist sehr wichtig für die Prüfung und auch sehr gut für das Verständnis. Glücklicherweise ist es nicht allzu kompliziert und die Schwierigkeit beschränkt sich vor allem auf Ableitungen und komplexe Zahlen. Es passiert auch wirklich oft das gleiche, sodass man vor allem einen Typ Aufgabe mit komplexen Zahlen können muss. Allerdings können die Berechnungen teils sehr lang werden, weshalb es wichtig ist sauber zu rechnen.

↔ Kap. 9

2.1 Phänomenologie

Jede Strömung kann grundsätzlich in einen **Drehungsfreien** Teil ($\text{rot } \underline{u} \equiv 0$) und einen **Drehungsbehafteten** Teil ($\text{rot } \underline{u} \not\equiv 0$) zerlegt werden, wobei $\omega := \text{rot } u$ die Wirbelstärke der Strömung ist und die Drehung eines Fluidteilchens beschreibt.

In diesem Kapitel wollen uns nur die Drehungsfreien Strömungen anschauen, da dies viele Vereinfachungen in Berechnungen mit sich bringt. Wir beschreiben unsere Strömung durch skalares Potential, sodass:

$$\underline{u} = \nabla \Phi$$

In realen Strömungen kann die Idee von Drehungsfreiheit ab und zu gut funktionieren. Generell versagt das Modell der Potentialströmung aber völlig, da Einflüsse von etwa Viskosität oder Turbulenz eine grosse Rolle spielen. Interessant ist hier das **d’Alambertsche Paradoxon**, welches besagt dass ein Körper in einer stationären Potentialströmung überhaupt keinen Widerstand erfährt (entgegen unserer Intuition).

Key Learning

In drehungsfreien Potentialströmungen schreiben wir das Geschwindigkeitsfeld nur abhängig von einem skalaren Potential:

$$\underline{u} = \nabla \Phi$$

2.2 Laplace-Gleichung und Superposition

Potentiale inkompressibler Strömungen erfüllen die **Laplace-Gleichung**:

$$\Delta \Phi \equiv \text{div}(\nabla \Phi) = 0$$

und unterliegen damit dem **Superpositionsprinzip**. Heisst für uns konkret, dass wir Geschwindigkeitsfelder, Potentiale und Stromfunktionen (kommt später) verschiedener Strömungen addieren können. Generell gilt übrigens für jedes beliebige skalare Feld $\text{rot}(\nabla \Phi) = 0$, und somit auch für unser Potential.

Key Learning

Potential, Drehungsfreiheit und Laplace-Gleichung:

$$\mathbf{u} = \nabla \Phi, \quad \text{rot } \mathbf{u} = \text{rot } \nabla \Phi = \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \Rightarrow \nabla^2 \Phi = \Delta \Phi = 0.$$

Bernoulli bei Potentialströmungen

Der allgemeine Satz von Bernoulli ist bereits bekannt und setzt Konstanz entlang einer Stromlinie voraus

$$\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} + U = B = \text{konst.}$$

wobei, B die Bernoulli-Konstante ist, und von Stromlinie zu Stromlinie variieren kann. Bei Potentialströmungen ($\text{rot } \underline{u} = 0$) ist B jedoch im *gesamten* Feld konstant. Das bedeutet: Kennt man den Druck an einem einzigen Punkt, lässt sich der Druck überall im Feld berechnen.

Die genaue Formel für Bernoulli bei Potentialströmungen findet sich auf S.58 des offiziellen Skripts. **Wichtig** ist zu erkennen, dass Druckanteile in Potentialströmungen nicht superponierbar sind, anders als die Geschwindigkeit und das Potential. Bei der Bernoulli-Gleichung sehen wir die quadratische Abhängigkeit der Geschwindigkeit, was uns die Superposition verhindert.

Allgemeiner Bernoulli	Bernoulli für Potentialströmungen
Gilt entlang einer Stromlinie	Gilt im gesamten Feld
B verschieden für untersch. Stromlinien	B konstant im gesamten Feld
Auch für wirbelbehaftete Strömungen	Nur wenn $\text{rot } \underline{u} = 0$
Nur reibungsfrei	Reibungsfreie oder reibungsbehaftete Newtonsche Fluide

Tabelle 2.1: Allgemeiner und spezieller Satz von Bernoulli

Key Learning

Geschwindigkeitsfeld, Potential Φ und Stromfunktion Ψ sind superponierbar, das Druckfeld dagegen nicht. Den Druck berechnet man deshalb immer aus dem *gesamten* überlagerten Geschwindigkeitsfeld.

2.3 Zirkulation und Quellstärke

Zirkulation misst, wie stark eine Strömung eine geschlossene Randkontur C insgesamt umläuft. Dabei ist sie einfach das Linienintegral der Geschwindigkeit. Später ist sie die zentrale Grösse für den Auftrieb.

$$\Gamma_C := \oint_C \underline{u} \cdot d\underline{x}$$

Durch richtige Voraussetzungen kann man die Zirkulation auch mit der Wirbelstärke $\underline{\omega}$ verbinden, was im nächsten Kapitel wichtig sein wird.

$$\Gamma_C = \oint_C \underline{u} \cdot d\underline{x} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \iint_S (\nabla \times \underline{u}) \cdot \underline{n} dS = \iint_S (\underline{\omega}) \cdot \underline{n} dS.$$

Intuitiv ergibt es vielleicht Sinn, dass eine drehungsbehaftete Strömung eine Zirkulation hat. Aber auch Potentialströmungen können Zirkulation haben, obwohl $\text{rot } \underline{u} = 0$ gilt. Wir werden später dazu den Potentialwirbel sehen.

↪ S. 56–57

Quellstärke misst den Volumenstrom durch die Randkontur:

$$Q_C := \oint_C \underline{u} \cdot \underline{n} dS \stackrel{\text{Gauss}}{=} \iint_S \text{div } \underline{u} dS$$

2.4 Stromfunktion

Neben der Darstellung durch ein Potential, kann eine ebene inkompressible Strömung auch durch die *Stromfunktion* Ψ geschrieben werden:

↪ S. 59–61

$$\underline{u} = \text{rot } \underline{\Psi}$$

Im Falle einer solchen ebenen Strömung, hat die Stromfunktion nur eine z-Komponente, und wir schreiben $\underline{\Psi} = (0, 0, \Psi_z)^T$, wobei $\Psi_z = \Psi(x, y)$. Damit gilt für das Geschwindigkeitsfeld:

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{pmatrix}$$

Stromlinien sind die Linien von konstantem Ψ . Die Geschwindigkeit der Strömung ist in jedem Punkt tangential zu ihnen, also tritt kein Fluid quer durch eine Stromlinie. Eine Stromlinie kann deshalb stets auch als feste Wand aufgefasst werden, was der Schlüssel zur Modellierung umströmter Körper ist.

Die Differenz der Ψ -Werte zweier Stromlinien gibt direkt den dazwischen hindurchtretenden Volumenstrom pro Tiefeneinheit an.

Ψ erfüllt ausserdem ebenfalls die Laplace-Gleichung, und somit ist sie wie das Potential und die Geschwindigkeit **superponierbar**.

Ein enger Zusammenhang verbindet Φ und Ψ . Die Potentiallinien $\Phi = \text{const}$ und die Stromlinien $\Psi = \text{const}$ stehen überall senkrecht aufeinander, denn $\nabla\Phi \cdot \nabla\Psi = 0$. Beide bilden zusammen ein orthogonales Kurvennetz. Dieses Kriterium erlaubt es, ein gegebenes Strömungsbild rasch auf Plausibilität zu prüfen.

Key Formula

Geschwindigkeiten aus Φ und Ψ :

$$u = \frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{\partial\Psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial\Phi}{\partial y} = -\frac{\partial\Psi}{\partial x},$$

$$u_r = \frac{\partial\Phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial\Psi}{\partial\theta}, \quad u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = -\frac{\partial\Psi}{\partial r}.$$

Volumenstrom zwischen zwei Stromlinien mit Tiefe b : $\dot{V}_{1,2} = b \cdot (\Psi_2 - \Psi_1)$.

$$\nabla\Phi \cdot \nabla\Psi = 0$$

Aufgabe: Gültige Potentialströmung (2.1)

2.5 Komplexes Potential

Komplexe Zahlen erlauben es Potentialströmungen sehr elegant darzustellen und erlauben es, ihre praktischen Regeln anzuwenden, wie es auch aus Physik oder Elektrotechnik bekannt ist.

Wir definieren dann das komplexe Potential $F(z)$:

$$F(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y), \quad \text{analog : } z = x + iy$$

Diese Schreibweise ist mathematisch hergeleitet korrekt und erfüllt auch die Laplace-Gleichung, was auch hier wieder Superposition erlaubt. Daraus folgt, dass differenzierbare, komplexe Funktionen $F(z)$ mit $\Phi = \text{Re}(F)$ und $\Psi = \text{Im}(F)$ automatisch eine gültige Potentialströmung beschreiben. Beachte, dass das komplexe Potential sowohl das reelle Potential, als auch die Stromfunktion enthält.

↪ S. 62, Anhang C.2

Mit dieser Eigenschaft werden wir sehr einfach Potentialströmungen beschreiben, und auch superponieren können.

Die Ableitung der komplexen Potentialfunktion liefert uns die komplexe Geschwindigkeit:

$$w(z) = \frac{dF}{dz} = u - iv = (u_r - iu_\theta) \cdot e^{-i\theta}$$

Analog zum komplexen Potential $F(z)$ werden wir die komplexe Zirkulation Γ_C einführen.

$$\Gamma_C = \oint_C w \, dz = \Gamma_C + i Q_C,$$

Für die komplexe Zirkulation wurde einfach die komplexe Geschwindigkeit in das Integral gesetzt, statt die reelle. Durch mathematischen Umformung erhält man den Ausdruck oben. Wir sehen, dass $\Gamma_C = \operatorname{Re}(\Gamma_C)$ und $Q_C = \operatorname{Im}(\Gamma_C)$.

Eigentlich hätten Potentialströmungen weder Zirkulation noch Quellstärke. Wenn die Kontur allerdings eine Singularität einschliesst, führt ein Potentialwirbel zu $\Gamma_C \neq 0$ und eine Quelle zu $Q_C \neq 0$.

Key Formula

Komplexes Potential und komplexe Geschwindigkeit:

$$F(z) = \Phi(x, y) + i \Psi(x, y), \quad w(z) = \frac{dF}{dz} = u - iv = (u_r - i u_\theta) \cdot e^{-i\theta}$$

Komplexe Zirkulation über eine geschlossene Kontur C :

$$\Gamma_C = \oint_C w \, dz = \Gamma_C + i Q_C,$$

Zirkulation und Quellstärke verschwinden, falls C keine Singularität umschliesst.

2.6 Elementarlösungen

Wie bereits mehrfach angedeutet, erlauben uns die Lösungen der Laplace-Gleichung $\Phi, \Psi, F(z)$ die Superposition von einzelnen Strömungen zu bilden. Wir würden daher gerne ein paar Grundbausteine haben, aus denen wir dann kompliziertere Strömungen basteln können. Das sind die **Elementarlösungen**. Für genauere Informationen würde ich wirklich das Skript empfehlen. Eine Visualisierung der Elementarlösungen kann ausserdem auf <https://potentialflow.com> gesehen werden.

↔ S. 63–66, Anhang D.2

- **Parallelströmung:** überall konstante Geschwindigkeit. Sie modelliert die ungestörte Anströmung weit weg vom Körper und ist die einzige Elementarlösung ganz ohne Singularität.

$$F(z) = (u_\infty - i v_\infty) z, \quad w(z) = u_\infty - i v_\infty$$

- **Quelle/Senke:** Fluid strömt radial aus dem Ursprung heraus ($Q > 0$) oder in ihn hinein ($Q < 0$). Q ist die Quellstärke. Damit modelliert man die verdrängende Wirkung eines Körpers. Die Geschwindigkeit fällt wie $1/r$ ab und wird im Zentrum unendlich.

$$F(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln z, \quad w(z) = \frac{Q}{2\pi z}, \quad u_r = \frac{Q}{2\pi r},$$

- **Potentialwirbel:** Das Fluid kreist um das Zentrum mit $u_\theta \sim 1/r$. Ausserhalb des Zentrums ist die Strömung drehungsfrei, im Zentrum sitzt die Singularität mit der Zirkulation Γ . Dieser Baustein erzeugt später den Auftrieb.

$$F(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z, \quad w(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi z}, \quad u_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r},$$

- **Dipol:** Grenzfall einer eng zusammenrückenden Quelle und Senke bei konstant gehaltenem Moment m . Die Stromlinien sind Kreise, welche die Dipolachse berühren. Zusammen mit einer Parallelströmung ergibt der Dipol den umströmten Kreiszylinder.

$$F(z) = \frac{m}{z}, \quad w(z) = -\frac{m}{z^2}$$

- **Keilströmung** $F = Cz^n$: Strömung um eine Ecke mit dem Öffnungswinkel $\alpha = \pi/n$.
Für $n = 2$ ist $\alpha = \pi/2$, also die ebene Staupunktströmung in einer rechtwinkligen Ecke.
Für $n = 1$ ist $\alpha = \pi$, die gewöhnliche Parallelströmung. Der Grenzfall $n = \frac{1}{2}$ ($\alpha = 2\pi$) beschreibt die Umströmung der Kante einer dünnen Platte.

$$F(z) = C z^n, \quad w(z) = C n z^{n-1} \quad \text{Öffnungswinkel } \alpha = \frac{\pi}{n}.$$

Verschiebungen und Drehungen Alle dieser Elementarlösungen sind im Ursprung definiert. Wenn man eine Potentialströmung deshalb an einen bestimmten Punkt z_0 verschieben möchte, erreicht man dies durch $\mathbf{F}_{z_0} = \mathbf{F}(\mathbf{z} - \mathbf{z}_0)$.

Ebenso kann die Strömung um den Winkel α gedreht werden: $\mathbf{F}_\alpha = \mathbf{F}(\mathbf{z} \cdot \mathbf{e}^{-i\alpha})$.

Die Verschiebungslogik ist genau gleich wie in Analysis I. Will man eine Funktion $f(x) = x$, die im Ursprung ihre Nullstelle hat, um drei Einheiten nach rechts verschieben, macht man $f_3(x) = x - 3$, und hat nun bei 3 eine Nullstelle $f_3(3) = 3 - 3 = 0$.

Key Formula

Parallelströmung: $F(z) = (u_\infty - iv_\infty) z,$

Quelle/Senke: $F(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln z,$

Potentialwirbel: $F(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z,$

Dipol: $F(z) = \frac{m}{z},$

Keilströmung: $F(z) = C z^n, \quad \text{Öffnungswinkel } \alpha = \frac{\pi}{n}.$

Verschieben: $F(z - z_0) \quad \text{Drehen: } F(z \cdot e^{-i\alpha}).$

Aufgabe: Analyse und Zerlegung (2.2)

Beispiel: komplexes Potential auswerten

Aufgabe. Zwei gegensinnige Potentialwirbel der Zirkulation Γ sitzen bei $z = +ia$ und $z = -ia$. Gesucht sind $F(z)$, die komplexe Geschwindigkeit $w(z)$ und das Geschwindigkeitsprofil auf der x -Achse.

Schritt 1: Potential aus Bausteinen überlagern. Ein Wirbel bei z_0 hat $-\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z - z_0)$. Mit entgegengesetztem Drehsinn der beiden Wirbel folgt:

$$F(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z - ia) + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z + ia) = \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{z + ia}{z - ia}.$$

Schritt 2: ableiten.

$$w(z) = \frac{dF}{dz} = \frac{i\Gamma}{2\pi} \left(\frac{1}{z + ia} - \frac{1}{z - ia} \right) = \frac{i\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{-2ia}{z^2 + a^2} = \frac{\Gamma}{\pi} \frac{a}{z^2 + a^2}.$$

Schritt 3: auf der x -Achse auswerten ($z = x$, reell):

$$w(x) = \frac{\Gamma}{\pi} \frac{a}{x^2 + a^2} = u - iv \Rightarrow u(x, 0) = \frac{\Gamma}{\pi} \frac{a}{x^2 + a^2}, \quad v(x, 0) = 0.$$

Das Maximum liegt bei $x = 0$, die Symmetrie liefert $v = 0$.

2.7 Spiegelung an einer Wand

Eine gerade, undurchströmte Wand verlangt, dass die Normalkomponente der Geschwindigkeit auf ihr verschwindet, also $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$. Diese Wand muss also irgendwie modelliert werden. Das erreicht man, indem man jede Singularität an der Wand spiegelt. Die Wand wird dadurch automatisch zur Symmetriestromlinie und muss nicht mehr explizit berücksichtigt werden.

↔ S. 66

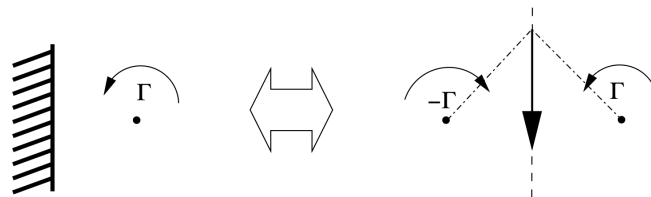


Abbildung 2.1: Spiegelung einer Singularität erzeugt Symmetriestromlinie.

Key Learning

Eine **Quelle** (bzw. Senke) wird mit **gleicher** Stärke gespiegelt, ein **Wirbel** mit entgegengesetztem (aber gleichstarkem) Drehsinn. Das gespiegelte Bild liegt im gleichen Wandabstand auf der anderen Seite. Die überlagerte Strömung aus Original und Bild erfüllt dann $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ auf der Wand.

Aufgabe: Strudel an Küste (2.3), Spiegelung an Wand (2.4)

2.8 Körper aus Überlagerungen

Die kennengelernten Elementarlösungen lassen sich nun überlagern, und formen dadurch wie bereits angedeutet spezifische Körperformen. Unten sehen wir das Beispiel einer Parallelströmung + Quelle + Senke. Wenn man sich die Staustromlinien als Körperberandung vorstellt, sehen wir dort direkt die Form einer Ellipse. Weitere Formen sind im Skript beschrieben.

↪ S. 68 – 71, Anhang D.2

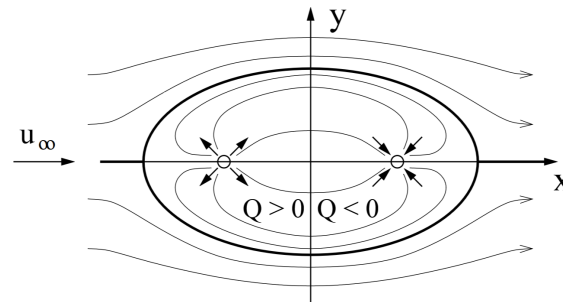


Abbildung 2.2: Rankine-Körper aus Parallelströmung, Quelle $+Q$ und Senke $-Q$

Aufgabe: Brückenpfeiler (2.5)

2.9 Zylinderumströmung mit Zirkulation

Der umströmte Kreiszyylinder entsteht aus Parallelströmung und Dipol. Interessant wird es jetzt, wenn wir zusätzlich eine Zirkulation im Mittelpunkt überlagern. Die Strömung wird dadurch asymmetrisch zur x-Achse (jedoch immer noch symmetrisch zur y-Achse) und führt dadurch auch zu einer asymmetrischen Druckverteilung auf der Oberfläche, die eine Auftriebskraft erzeugt. Die mathematischen Beschreibungen davon sind im Skript zu finden.

↪ S. 69–71

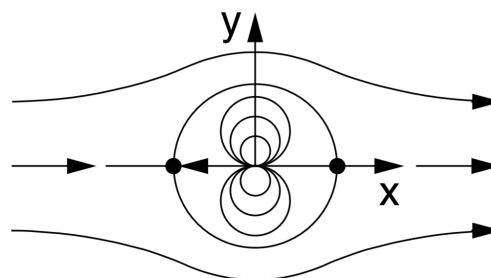


Abbildung 2.3: Reine Zylinderumströmung (Parallelströmung und Dipol) ohne Zirkulation.

Je stärker die Zirkulation ist, desto mehr werden die 2 Staupunkte entlang der Oberfläche zusammengeschoben. Ab $|\Gamma| > 4\pi r_0 u_\infty$ löst sich ein Staupunkt ab und wandert von der Zylinderwand weg, während der andere als nicht reale Lösung in den Zylinderkörper hineinwandert 2.9.

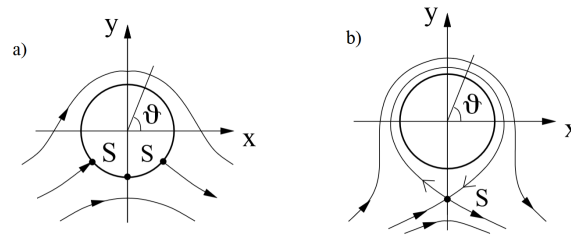


Abbildung 2.4: Zylinder mit überlagerter Zirkulation: verschobene Staupunkte und Auftriebskraft F_y .

Key Learning

Ein umströmter Kreiszylinder mit Zirkulation führt zu einer Asymmetrie bezüglich der x-Achse und erzeugt dadurch eine Auftriebskraft. Eine Widerstandskraft bleibt jedoch nach dem *d’Alambertschen Paradoxon* aus, da immer noch eine Symmetrie bezüglich der y-Achse besteht.

Aufgabe: Zylinder mit Zirkulation (2.6)

2.10 Auftriebsformel von Kutta-Joukowski

Die obige Beobachtung lässt sich auf alle beliebigen Körper in einer ebenen Potentialströmung anwenden, die mit u_∞ stationär angeströmt werden:

$$F_y = -\rho u_\infty \Gamma b.$$

Die Kraft F zeigt dabei immer senkrecht zur Anströmungsrichtung, und b ist die Tiefe in z-Richtung des Körpers.

↪ S. 70–72

Key Formula

Auftrieb nach Kutta-Joukowski (Spannweite b):

$$F_y = -\rho u_\infty \Gamma b.$$

Der Auftrieb ist proportional zu Zirkulation, Dichte und Anströmgeschwindigkeit. Die Viskosität geht nicht ein.

Die Kutta-Abflussbedingung

In der reinen Potentialtheorie ist die Zirkulation Γ um ein Profil zunächst *nicht eindeutig bestimmt*. Bei realen Profilen mit Hinterkante (wie einem Tragflügel) wird beobachtet, dass sich die Zirkulation gerade so einstellt, dass die Hinterkante nicht umströmt wird, sondern auf einer Staustromlinie liegt, wo die Strömung mit endlicher Geschwindigkeit abfließt.

↪ S. 72–73

2.11 Konforme Abbildung

Bisher konnten wir nur einfache überlagerte Körper erzeugen. Reale Profile sind aber meist deutlich komplizierter, wie zum Beispiel ein Tragflügel. Irgendwie würden wir aber gerne unsere Lösungen von den Fällen wie der Zylinderumströmung auf diese realen Profile übertragen, ohne komplizierte neue Berechnungen zu machen. Konforme Abbildungen lösen dieses Problem. Sie sind eigentlich einfach Funktionen, die jeden Punkt auf einen neuen Punkt abbilden. Somit lassen sich zum Beispiel konforme Abbildungen finden, die zum Beispiel einen Kreis auf ein Tragflügelprofil abbilden.

Ein wichtiges Beispiel ist die sogenannte **Joukowski-Abbildung**:

$$\zeta = z + \frac{a^2}{z},$$

↪ S. 73–74

2.12 Instationäre Potentialströmung und virtuelle Masse

Bei einer instationären Bewegung, etwa einem aus der Ruhe beschleunigten Körper, ändern sich gegenüber dem stationären Fall nur drei Dinge.

↪ S. 75–77

- Das Potential erfüllt zu jedem Zeitpunkt weiterhin die *zeitunabhängige* Laplace-Gleichung. Die Strömung ist also quasistationär, eine bloße Abfolge stationärer Bilder, und die Vorgeschichte spielt keine Rolle.
- Die Bernoulli-Gleichung erhält einen Zeitterm $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$.
- Ein beschleunigter Körper muss umgebendes Fluid mitbeschleunigen. Das kostet Kraft und äussert sich in der virtuellen Masse. Diese ist Geometrieabhängig und gegeben (auch im Skript). Anders als im stationären Fall tritt dadurch eine endliche Kraft auf, das Paradoxon von d'Alembert gilt hier also nicht.

Key Formula

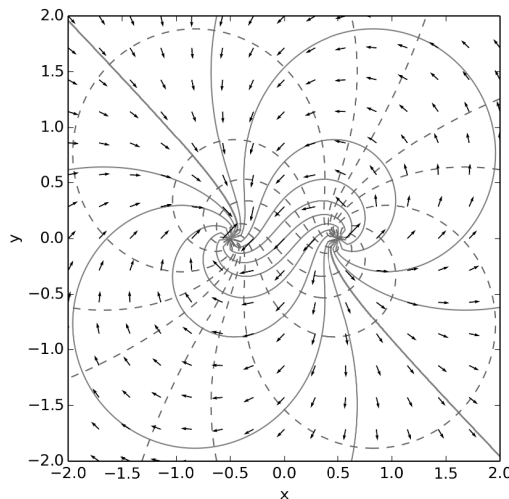
Instationäre Bernoulli-Gleichung:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla \Phi)^2 + \frac{p}{\rho} = C(t).$$

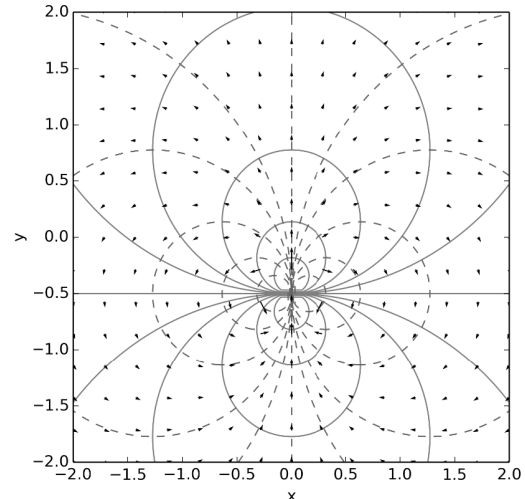
Mit der virtuellen Masse m' ist die zum Beschleunigen nötige Kraft $F = (m_K + m') \frac{dU}{dt}$.

Aufgabe 2.1 – Gültige Potentialströmung erkennen (Verständnis)

Die beiden Bilder zeigen je ein Geschwindigkeitsfeld (Pfeile) mit Stromlinien (durchgezogen) und Potentiallinien (gestrichelt). Welches Bild kann eine gültige ebene Potentialströmung sein, und woran erkennt man das?



(a)



(b)

Lösung.

Bild (a) zeigt eine gültige Potentialströmung. Dort schneiden sich Strom- und Potentiallinien überall rechtwinklig, wie es $\nabla\Phi \cdot \nabla\Psi = 0$ verlangt. In Bild (b) schneiden sich die beiden Kurvenscharen schräg, das Orthogonalitätskriterium ist verletzt, und es kann keine Potentialströmung sein.

Aufgabe 2.2 – Gegebenes Feld analysieren und zerlegen (Extra-Aufgabe 2)

Eine ebene Strömung hat die Stromfunktion $\Psi(r, \theta) = \frac{k \cos \theta}{r} + l r^2 \sin(2\theta)$ mit $k, l > 0$.

- Zeigen Sie, dass die Strömung drehungsfrei ist.
- Berechnen Sie das Potential $\Phi(r, \theta)$.
- Geben Sie alle Staupunkte an.
- Aus welchen Elementarströmungen ist das Feld zusammengesetzt?

Lösung.

Geschwindigkeiten aus der Stromfunktion:

$$u_r = \frac{1}{r} \partial_\theta \Psi = -\frac{k}{r^2} \sin \theta + 2lr \cos 2\theta, \quad u_\theta = -\partial_r \Psi = \frac{k}{r^2} \cos \theta - 2lr \sin 2\theta.$$

a) Mit $(\nabla \times \mathbf{u})_z = \frac{1}{r} [\partial_r(r u_\theta) - \partial_\theta u_r]$ liefern beide Terme $-\frac{k}{r^2} \cos \theta - 4lr \sin 2\theta$, sodass die Rotation verschwindet.

b) Aus $\partial_r \Phi = u_r$ und $\frac{1}{r} \partial_\theta \Phi = u_\theta$:

$$\Phi(r, \theta) = \frac{k}{r} \sin \theta + l r^2 \cos(2\theta) + \text{const.}$$

c) Nullsetzen beider Komponenten (unphysikalische Radien verworfen) ergibt drei Staupunkte:

$$r_s = \left(\frac{k}{2l} \right)^{1/3}, \quad \theta_s \in \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2} \right\}.$$

d) Die Stromfunktion ist die Summe eines um $\frac{\pi}{2}$ gedrehten Dipols ($m = k$) und einer Keilströmung ($n = 2, C = l$).

Aufgabe 2.3 – Strudel an einer Küste (Zwischentest FS24, Aufgabe 2)

Ein geradliniger Küstenabschnitt (die x -Achse) wird parallel mit der Geschwindigkeit U angeströmt. Bei $(0, a)$ liegt ein Strudel, modelliert durch einen Wirbel der Zirkulation $-\Gamma$ und eine Senke der Stärke $-Q$.

- Geben Sie das komplexe Potential $F(z)$ an, das die Küste korrekt modelliert.
- Bestimmen Sie die komplexe Geschwindigkeit $w(z)$.
- Im Punkt $P_0(0, 0)$ liegt ein Staupunkt. Berechnen Sie $|\Gamma|$ als Funktion von U und a .
- Die Strudelform bedingt zusätzlich $\Gamma = Q$. Bestimmen Sie die Koordinaten aller weiteren Staupunkte.

Lösung.

a) Die Küste ist eine Wand entlang der x -Achse. Man spiegelt die Singularitäten bei $z = ia$ an der reellen Achse nach $z = -ia$. Die Senke wird mit gleicher Stärke gespiegelt, der Wirbel mit umgekehrtem Drehsinn. Die Parallelströmung verläuft bereits parallel zur Wand. Damit

$$F(z) = Uz - \frac{Q}{2\pi} \ln(z^2 + a^2) + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{z - ia}{z + ia}.$$

b) Ableiten ergibt

$$w(z) = \frac{dF}{dz} = U - \frac{Q}{\pi} \frac{z + a}{z^2 + a^2}.$$

c) Der Staupunkt bei $z = 0$ verlangt $w(0) = 0$, also $U - \frac{a\Gamma}{\pi a^2} = 0$ und damit

$$|\Gamma| = \pi U a.$$

d) Mit $\Gamma = Q = \pi U a$ wird die Bedingung $w(z) = 0$ zu $\pi U (z^2 + a^2) = \pi U a z + \pi U a^2$, also $z^2 = a z$. Neben $z = 0$ folgt ein weiterer Staupunkt bei

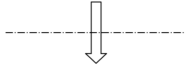
$$z = a, \quad (x_S, y_S) = (a, 0),$$

der auf der Küste stromabwärts liegt.

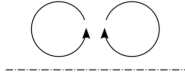
Aufgabe 2.4 – Spiegelung an einer Wand (Prüfung HS18, MC)

Geben Sie für jede Konfiguration an, ob die gestrichelte Linie die Wandbedingung $u_{\perp}|_{\text{Wand}} = 0$ erfüllt.

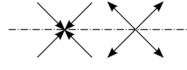
(a) 1 Dipol:



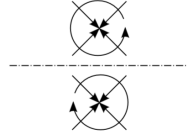
(b) 2 Wirbel:



(c) 1 Quelle, 1 Senke:



(d) 2 Wirbel, 2 Senken:



- a) 1 Dipol
- b) 2 Wirbel
- c) 1 Quelle, 1 Senke
- d) 2 Wirbel, 2 Senken

Lösung: (Skript S. 66 (Spiegelung))

Richtig: c, d

Falsch: a, b

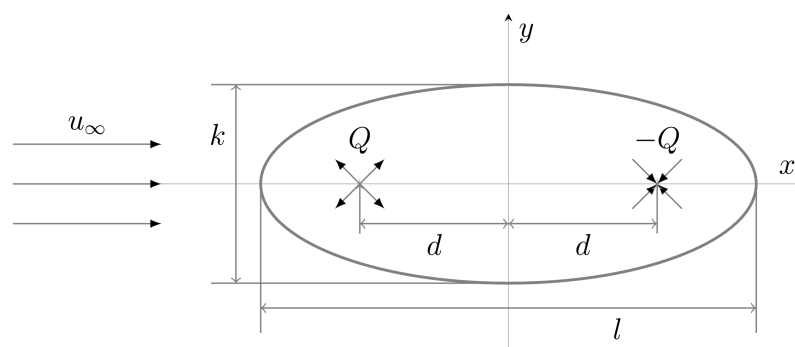
Aufgabe 2.5 – Rankine-Körper als Brückenpfeiler (Extra-Aufgabe 3)

Die Umströmung eines schlanken Pfeilers wird als ebene Potentialströmung aus Parallelströmung, Quelle $+Q$ bei $(-d, 0)$ und Senke $-Q$ bei $(d, 0)$ modelliert. Pfeilerlänge l , Breite k . Gegeben: $u_{\infty} = 0.1 \text{ m/s}$, $l = 10 \text{ m}$, $d = 4.85 \text{ m}$. Für kleine Winkel gilt $\arctan x \approx x$.

- a) Zeichnen Sie die Situation in einem Koordinatensystem auf.
- b) Geben Sie $F(z)$ sowie Φ und Ψ an.
- c) Bestimmen Sie Q aus den Staupunkten bei $(\pm \frac{l}{2}, 0)$.
- d) Welche Kraft wirkt auf den Pfeiler?

Lösung.

a)



b) Komplexes Potential und seine Teile:

$$F(z) = u_\infty z + \frac{Q}{2\pi} \ln(z+d) - \frac{Q}{2\pi} \ln(z-d)$$

Mit $z = x + iy$ erhalten wir

$$F(z) = u_\infty(x + iy) + \frac{Q}{2\pi} \ln((x+d) + iy) - \frac{Q}{2\pi} \ln((x-d) + iy).$$

Für eine komplexe Zahl $\zeta = a + ib$ gilt

$$\ln \zeta = \ln |\zeta| + i \arg(\zeta), \quad |\zeta| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Für $z + d = (x+d) + iy$ gilt daher

$$|z+d| = \sqrt{(x+d)^2 + y^2}, \quad \arg(z+d) = \arctan\left(\frac{y}{x+d}\right),$$

also

$$\ln(z+d) = \ln\left(\sqrt{(x+d)^2 + y^2}\right) + i \arctan\left(\frac{y}{x+d}\right).$$

Analog gilt für $z-d = (x-d) + iy$

$$|z-d| = \sqrt{(x-d)^2 + y^2}, \quad \arg(z-d) = \arctan\left(\frac{y}{x-d}\right),$$

und damit

$$\ln(z-d) = \ln\left(\sqrt{(x-d)^2 + y^2}\right) + i \arctan\left(\frac{y}{x-d}\right).$$

Einsetzen liefert

$$\begin{aligned} F(z) &= u_\infty x + i u_\infty y + \frac{Q}{2\pi} \ln\left(\sqrt{(x+d)^2 + y^2}\right) + i \frac{Q}{2\pi} \arctan\left(\frac{y}{x+d}\right) \\ &\quad - \frac{Q}{2\pi} \ln\left(\sqrt{(x-d)^2 + y^2}\right) - i \frac{Q}{2\pi} \arctan\left(\frac{y}{x-d}\right). \end{aligned}$$

Mit $F(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y)$ folgt aus dem Realteil

$$\Phi(x, y) = u_\infty x + \frac{Q}{2\pi} \ln\left(\sqrt{(x+d)^2 + y^2}\right) - \frac{Q}{2\pi} \ln\left(\sqrt{(x-d)^2 + y^2}\right).$$

Mit $\ln a - \ln b = \ln(a/b)$ ergibt sich

$$\boxed{\Phi(x, y) = u_\infty x + \frac{Q}{2\pi} \ln\left(\frac{\sqrt{(x+d)^2 + y^2}}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2}}\right)}.$$

Aus dem Imaginärteil folgt

$$\boxed{\Psi(x, y) = u_\infty y + \frac{Q}{2\pi} \left[\arctan\left(\frac{y}{x+d}\right) - \arctan\left(\frac{y}{x-d}\right) \right]}.$$

c) Aus $w(z) = u_\infty + \frac{Q}{2\pi} \left(\frac{1}{z+d} - \frac{1}{z-d} \right)$ und $w(\frac{l}{2}) = 0$:

$$Q = \pi u_\infty \frac{(l/2)^2 - d^2}{d} = \pi \cdot 0,1 \cdot \frac{25 - 23,52}{4,85} \approx 0,0957 \text{ m}^2/\text{s}.$$

d) Es wirkt keine Kräfte. In Anströmungsrichtung nicht wegen des d'Alambertschen Paradoxons, senkrecht zur Anströmungsrichtung nicht, weil keine Zirkulation vorhanden ist.

Aufgabe 2.6 – Zylinder mit Zirkulation (Prüfung HS18, Aufgabe 2)

Ein ebenes Feld lautet mit $U = 1$, $a > 0$, b reell

$$u_r = \cos \theta \left(1 - \frac{a}{r^2}\right), \quad u_\theta = -\sin \theta \left(1 + \frac{a}{r^2}\right) + \frac{b}{r}.$$

- Zeigen Sie, dass eine inkompressible Potentialströmung vorliegt.
- Berechnen Sie das Potential $\Phi(r, \theta)$.
- Das Feld beschreibe einen Zylinder mit Radius R . Bestimmen Sie a .
- Bestimmen Sie b so, dass die Staupunkte bei $\theta_S = -\frac{\pi}{4}$ und $-\frac{3\pi}{4}$ liegen.

Die Zylinderumströmung soll nun mit Hilfe der Joukowski-Abbildung $\zeta = z + \frac{R^2}{z}$ konform von der z -Ebene in die ζ -Ebene abgebildet werden.

- Skizzieren Sie das Bild des Kreises mit Radius R (Zylinderwand) in der ζ -Ebene.
- Zeigen Sie rechnerisch, an welchem Ort der Bildpunkt A_ζ des Punktes A in der ζ -Ebene liegt.

Lösung.

- Es muss gezeigt werden, dass das Geschwindigkeitsfeld sowohl divergenzfrei als auch wirbelfrei ist. In Polarkoordinaten lauten Divergenz und Rotation eines ebenen Feldes

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ru_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}, \quad (\nabla \times \mathbf{u})_z = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r}(ru_\theta) - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right].$$

Zunächst wird die Divergenz berechnet. Es gilt

$$ru_r = r \cos \theta \left(1 - \frac{a}{r^2}\right) = \cos \theta \left(r - \frac{a}{r}\right),$$

und damit

$$\frac{\partial}{\partial r}(ru_r) = \cos \theta \left(1 + \frac{a}{r^2}\right).$$

Für die Winkelableitung von u_θ folgt

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = -\cos \theta \left(1 + \frac{a}{r^2}\right),$$

da der Term b/r nicht von θ abhängt. Einsetzen ergibt

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{r} \cos \theta \left(1 + \frac{a}{r^2}\right) - \frac{1}{r} \cos \theta \left(1 + \frac{a}{r^2}\right) = 0.$$

Das Feld ist somit inkompressibel.

Für die Rotation gilt zunächst

$$ru_\theta = -r \sin \theta \left(1 + \frac{a}{r^2}\right) + b = -r \sin \theta - \frac{a}{r} \sin \theta + b.$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial}{\partial r}(ru_\theta) = -\sin \theta + \frac{a}{r^2} \sin \theta = -\sin \theta \left(1 - \frac{a}{r^2}\right).$$

Weiter ist

$$\frac{\partial u_r}{\partial \theta} = -\sin \theta \left(1 - \frac{a}{r^2}\right).$$

Damit ergibt sich

$$(\nabla \times \mathbf{u})_z = \frac{1}{r} \left[-\sin \theta \left(1 - \frac{a}{r^2} \right) + \sin \theta \left(1 - \frac{a}{r^2} \right) \right] = 0.$$

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0}},$$

b) Für das Geschwindigkeitspotential gilt in Polarkoordinaten

$$u_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}.$$

Also

$$u_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \cos \theta \left(1 - \frac{a}{r^2} \right)$$

Integration nach r ergibt

$$\Phi(r, \theta) = r \cos \theta + \frac{a}{r} \cos \theta + f(\theta).$$

Für $u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}$ gilt nun

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = -r \sin \theta - \frac{a}{r} \sin \theta + f'(\theta),$$

also

$$u_\theta = -\sin \theta - \frac{a}{r^2} \sin \theta + \frac{f'(\theta)}{r}.$$

Vergleichen wir dies mit dem gegebenen Ausdruck

$$u_\theta = -\sin \theta \left(1 + \frac{a}{r^2} \right) + \frac{b}{r}$$

erhalten wir

$$\frac{f'(\theta)}{r} = \frac{b}{r} \quad \Rightarrow \quad f'(\theta) = b.$$

$$\Rightarrow f(\theta) = b\theta + C$$

$$\boxed{\Phi(r, \theta) = r \cos \theta + \frac{a}{r} \cos \theta + b\theta + C.}$$

c) Randbedingung $u_r(R) = 0$ für alle θ verlangt

$$1 - \frac{a}{R^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad a = R^2.$$

d) Mit $a = R^2$ ist $u_\theta(R) = -2 \sin \theta + \frac{b}{R}$, und $u_\theta(R) = 0$ liefert $\sin \theta_S = \frac{b}{2R}$. Für $\theta_S = -\frac{\pi}{4}$:

$$b = -\sqrt{2} R,$$

womit auch $\theta_S = -\frac{3\pi}{4}$ erfüllt ist.

e) Auf der Zylinderwand gilt $z = Re^{i\theta}$. Mit der Joukowski-Abbildung

$$\zeta = z + \frac{R^2}{z}$$

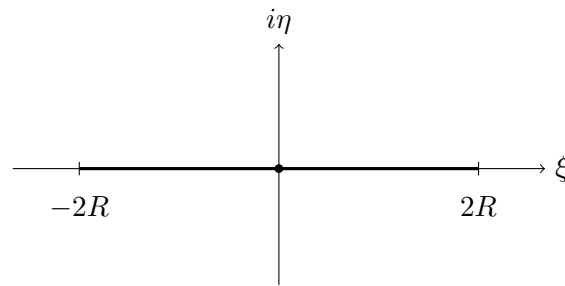
folgt

$$\zeta = Re^{i\theta} + \frac{R^2}{Re^{i\theta}} = R(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = 2R \cos \theta.$$

Damit ist ζ rein reell und nimmt für $0 \leq \theta < 2\pi$ alle Werte zwischen $-2R$ und $2R$ an. Der Kreis $|z| = R$ wird somit auf die Strecke

$$\boxed{-2R \leq \xi \leq 2R, \quad \eta = 0}$$

in der ζ -Ebene abgebildet.



f) Für den Punkt A gilt

$$r_A = R, \quad \theta_A = \frac{\pi}{2},$$

also

$$z_A = R e^{i\pi/2} = iR.$$

Einsetzen in die Joukowski-Abbildung ergibt

$$\zeta_A = iR + \frac{R^2}{iR} = iR - iR = 0.$$

Der Bildpunkt liegt daher im Ursprung der ζ -Ebene:

$$\boxed{\zeta_A = 0.}$$

KAPITEL 3

Drehungsbehaftete Strömungen

Dieses Kapitel ist etwas kürzer als die anderen, aber nicht weniger relevant. Vor allem induzierte Geschwindigkeitsberechnung sind immer sehr zentral in Prüfungen und sollten deshalb gut geübt werden. Das Theorieverständnis ist aber nicht zu unterschätzen, da es immer MC Aufgaben dazu gibt. Durch üben merkt ihr aber, welches Wissen und welcher Grad davon tatsächlich wichtig ist.

↪ Kap. 10

3.1 Phänomenologie

Im vorigen Kapitel war die Strömung überall drehungsfrei ($\text{rot } \mathbf{u} = \mathbf{0}$), und ein einziges skalares Potential genügte zur Beschreibung. Sobald die Drehungsfreiheit wegfällt, betritt man die Welt der Wirbel. Genau dort spielt sich ein Grossteil der realen Strömungsphysik ab. Grenzschichten, Ablösung, Nachlauf, Turbulenz und der Auftrieb endlicher Tragflügel sind allesamt drehungsbehaftet.

3.2 Zirkulation

Die Zirkulation $\Gamma_C = \oint_C \underline{u} \cdot d\underline{x}$ kennen wir bereits. In drehungsbehafteten Strömungen ist sie das Mass für die Stärke eines Wirbels.

↪ S. 82

Key Formula

Zirkulation und Wirbelfluss:

$$\Gamma_C = \oint_C \underline{u} \cdot d\underline{x} = \iint_S \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Die Zirkulation um eine Kontur C ist gleich dem Fluss der Wirbelstärke durch die eingespante Fläche S .

In der reinen Potentialströmung kam Zirkulation nur durch einzelne Singularitäten zustande. Hier sitzt sie in einem räumlich verteilten Wirbelstärkefeld. Ein **Wirbelfaden** ist ein dünner Strang konzentrierter Wirbelstärke und trägt eine bestimmte Zirkulation Γ .

3.3 Wirbelstärkefeld

Die Wirbelstärke $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \underline{u}$ ist eine lokale Grösse. Sie beschreibt die Drehung eines einzelnen Fluidelements. Das Wirbelstärkefeld $\boldsymbol{\omega}(\underline{x})$ ordnet jedem Punkt diese lokale Drehung zu, ganz analog zum Geschwindigkeitsfeld $\underline{u}(\underline{x})$.

↪ S. 79–82

Key Learning

Eigenschaften des Wirbelstärkefeldes $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{u}$:

- Quellenfrei, $\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} \equiv 0$, auch in kompressibler Strömung ($\text{div}(\text{rot } \dots = 0)$, always)
- Galilei-invariant
- Es misst die lokale Rotation eines Teilchens.
- **Kein Wirbel ohne Rotation**, aber Umkehrung stimmt nicht (z.B. Scherströmung)

Die genaue Unterscheidung zwischen Wirbelstärkefeld und Geschwindigkeitsfeld ist eine häufige Stolperstelle. Beide sind Vektorfelder mit analogen Begriffen, verhalten sich aber unterschiedlich.

Wirbelstärkefeld $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x})$	Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{u}(\mathbf{x})$
$\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} \equiv 0$ (immer)	$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ (nur inkompressibel)
Galilei-invariant	nicht Galilei-invariant
Wirbellinien = Integralkurven von $\boldsymbol{\omega}$	Stromlinien = Integralkurven von $\mathbf{u}$
Wirbelröhre, Wirbelfaden	Stromröhre, Stromfaden
$\Gamma = \iint_S \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} \, dS$	$\dot{V} = \iint_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS$

Tabelle 3.1: Analogien und Unterschiede zwischen Wirbelstärke- und Geschwindigkeitsfeld.

3.4 Analytische Wirbeltypen

Der *Starrkörperwirbel* dreht mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ($u_\theta = \Omega r$, $\omega = 2\Omega$), ist drehungsbehaftet und hat keine Singularität. Der *Potentialwirbel* hat $u_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}$, ist überall drehungsfrei ausser im Zentrum (Singularität) und erhält die Orientierung der Fluidpartikel. Der *Rankine-Wirbel* kombiniert einen starr rotierenden Kern mit einem aussen anschliessenden Potentialwirbel.

Key Learning

Starrkörper- und Potentialwirbel haben dieselben kreisförmigen Stromlinien, unterscheiden sich aber grundlegend in der Wirbelstärke: der Starrkörperwirbel ist drehungsbehaftet, der Potentialwirbel drehungsfrei.

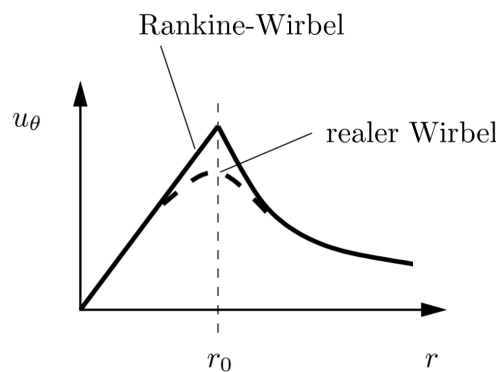


Abbildung 3.1: Rankine-Wirbel: Geschwindigkeit $u_\theta(r)$ (linear im Kern, $\propto \frac{1}{r}$ aussen) und Wirbelstärke $\omega(r)$.

3.5 Wirbellinien, Wirbelröhren und Wirbelfäden

Für das Wirbelstärkefeld bildet man dieselben geometrischen Begriffe wie für das Geschwindigkeitsfeld.

- **Wirbellinie:** Integralkurve des Wirbelstärkefeldes, in jedem Punkt also tangential zu $\boldsymbol{\omega}$. Sie ist das Analogon zur Stromlinie.
- **Wirbelröhre:** die von allen Wirbellinien durch eine geschlossene Kurve gebildete Röhre. Durch ihren Mantel tritt keine Wirbelstärke.
- **Wirbelfaden:** eine sehr dünne Wirbelröhre, über deren Querschnitt die Wirbelstärke praktisch konstant ist. Er trägt die Zirkulation Γ und ist der Baustein des Gesetzes von Biot-Savart.

↔ S. 81–82

3.6 Gesetz von Biot-Savart

Bisher ging es von der Geschwindigkeit zur Wirbelstärke, $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{u}$. Oft hat man aber die umgekehrten Frage. Gegeben ist ein Wirbelstärkefeld, etwa einige Wirbelfäden, und gesucht ist das davon *induzierte* Geschwindigkeitsfeld. Genau das leistet das Gesetz von Biot-Savart.

↔ S. 83

Es ist analog zum Biot-Savart-Gesetz der Elektrodynamik. Ein Wirbelfaden mit Zirkulation Γ spielt die Rolle eines stromdurchflossenen Leiters, und das induzierte Geschwindigkeitsfeld entspricht dem Magnetfeld um diesen Leiter. So wie ein gerader Draht ein ringförmiges Magnetfeld erzeugt, induziert ein gerader Wirbelfaden eine azimuthale Geschwindigkeit (tangential an den Kreis). Bei einem unendlich langen geraden Wirbelfaden, beträgt die induzierte Geschwindigkeit:

$$u_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

Für den Beitrag eines endlich langen, geraden Wirbelfadenstücks gilt:

$$u = \frac{\Gamma}{4\pi r} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2).$$

Diese Formel gilt auch für einen halibunendlichen Wirbelfaden, also ein Stück mit einem definierten Anfang, aber ohne Ende. Dann wird einer der beiden Winkel entweder $\theta = 0$ oder $\theta = \pi$. Generell gilt, dass man die Beiträge verschiedener solcher Stücke aufaddieren kann (zum Beispiel später bei einem Hufeisenwirbel).

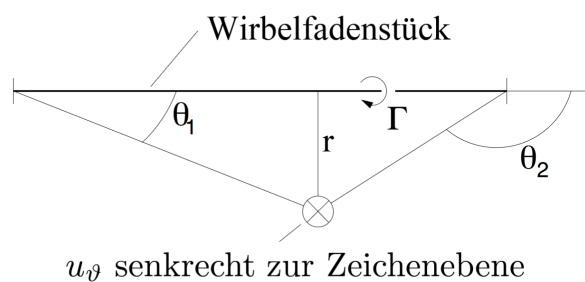


Abbildung 3.2: Endliches gerades Wirbelfadenstück: Abstand h und die Winkel θ_1 , θ_2 zum Referenzpunkt.

Die allgemeine Formel für einen Wirbelfadenstück welches beliebig im Raum liegt kann näher im Skript angesehen werden und lautet:

$$\underline{u}(\underline{x}) = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_C \frac{d\underline{s} \times \underline{r}}{|\underline{r}|^3}.$$

Key Formula

Gerades Wirbelfadenstück im senkrechten Abstand r , mit den Winkeln θ_1, θ_2 zu seinen Enden:

$$u = \frac{\Gamma}{4\pi r} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2).$$

Aufgabe: *Wirbelring* (3.1), *Hängegleiter* (3.2)

3.7 Wirbeltransportgleichungen

Wie entwickelt sich die Wirbelstärke in einer Strömung? Die Wirbeltransportgleichungen zeigen, wodurch Wirbelstärke transportiert, verstärkt, gekippt und erzeugt wird.

↔ S. 84–87

Links in den Gleichungen steht immer die materielle Ableitung (wie in Fluid 1) $\frac{D\omega}{Dt}$, also die Änderungsrate der Wirbelstärke entlang eines mitbewegten Fluidelements. Rechts stehen die Prozesse, die diese Änderung bewirken.

Inkompressible Strömung

Annahmen: $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, $\varrho = \text{const}$, konservatives äusseres Kraftfeld.

Key Formula

$$\frac{D\omega}{Dt} = \underbrace{(\omega \cdot \nabla) \mathbf{u}}_{\text{Wirbelstreckung } W} + \underbrace{\nu \Delta \omega}_{\text{Diffusion}}.$$

In diesem Fall spielt der Druck keine Rolle und es bleiben 2 Terme:

- Der **Diffusionsterm** $\nu \Delta \omega$ beschreibt wie sich die Wirbelstärke durch viskose Effekte verteilt, genau wie auch Wärmeleitung Temperatur ausgleicht.
- Der **Wirbelstreckungsterm** $W = (\omega \cdot \nabla) \mathbf{u}$ ist nichtlinear und beschreibt, wie ein Geschwindigkeitsgradient ein Wirbelelement verformt.

In ebener Strömung steht ω senkrecht zur Ebene, W verschwindet, und es bleibt eine Diffusionsgleichung.

Wirbelstreckung und Wirbelkippen.

Ein Wirbelelement kann gestreckt oder gestaucht (Wirbelstreckung) oder gekippt (Wirbelkippen) werden, je nachdem ob der Geschwindigkeitsgradient parallel oder senkrecht zur Wirbellinie liegt. Dazu zerlegt man die Geschwindigkeit längs des Wirbelelements in einen Anteil parallel zur Wirbellinie $\underline{u}_{\parallel}$ und einen senkrechten Anteil $\underline{u}_{\perp}$, wobei s die Bogenlänge entlang des Elements ist.



Abbildung 3.3: Wirbelstreckung (b) und Wirbelkippen (c) eines Wirbelelements.

- $\frac{\partial u_{\parallel}}{\partial s} > 0$: eine Streckung (im wörtlichen Sinn) des lokalen Wirbelelements, Erhöhung von $\underline{\omega}$
- $\frac{\partial u_{\parallel}}{\partial s} < 0$: eine Stauchung des lokalen Wirbelelements, Verminderung von $\underline{\omega}$
- $\frac{\partial u_{\perp}}{\partial s} \neq 0$: ein Kippen des Wirbelelements, Veränderung der Richtung von $\underline{\omega}$

Barotrope und barokline Strömung

Für die Wirbeltransportgleichungen bei veränderlicher Dichte müssen wir uns das Zusammenspiel von Druck und Dichte anschauen.

- **Barotrop** bedeutet dass die Dichte nur eine Funktion des Drucks ist $\varrho = \varrho(p)$. Flächen konstanter Dichte (Isochoren) und konstanten Drucks (Isobaren) liegen parallel. Beispiele barotroper Strömungen können inkompressible, isotherme und auch isentrope Strömungen sein.
- **Baroklin** ist eine Strömung, sobald sie nicht barotrop ist. Isochoren und Isobaren sind nun nicht mehr parallel, und es entsteht ein **Baroklines Drehmoment**, welches auf ein Fluidteilchen wirkt

Strömung mit veränderlicher Dichte

Annahmen: $\varrho = \varrho(\mathbf{x}, t)$, reibungsfrei.

Key Formula

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\underline{\omega}}{\varrho} \right) = \left(\frac{\underline{\omega}}{\varrho} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} + \underbrace{\frac{1}{\varrho^3} (\nabla \varrho \times \nabla p)}_{\text{baroklines Drehmoment}} .$$

Neu ist das *barokline Drehmoment* $\frac{1}{\varrho^3} (\nabla \varrho \times \nabla p)$. Barotrop sind $\nabla \varrho$ und ∇p parallel, das Kreuzprodukt verschwindet und es entsteht keine Drehung. Baroklin greift die Druckkraft ausserhalb des Schwerpunkts an und erzeugt ein Drehmoment, das neue Wirbelstärke senkrecht zu $\nabla \varrho$ und ∇p aufbaut.

Key Learning

Wirbelstärke wird transportiert durch Konvektion, Wirbelstreckung, viskose Diffusion und das barokline Drehmoment. Bei konstanter Dichte liefern weder der Druckgradient noch konservative Volumenkräfte einen Beitrag. Neu erzeugt wird Wirbelstärke nur an Wänden (Haftbedingung mit anschließender viskoser Diffusion), durch barokline Effekte oder durch nichtkonservative Kräfte.

Aufgabe: *Lokales Wirbelement* (3.3)

3.8 Wirbelsätze

Die Wirbelsätze machen allgemeine Aussagen über Zirkulation und Wirbelstärke und erklären viele reale Phänomene.

↔ S. 87–88

Helmholtz'scher Wirbelsatz

Längs einer Wirbelröhre ist die Zirkulation konstant,

$$\omega_1 A_1 = \omega_2 A_2.$$

Eine Wirbelröhre kann nicht im Fluid enden, sie schliesst sich zu einem Ring zusammen oder endet an einer Berandung. Verengt sich ihr Querschnitt, steigt die Wirbelstärke, analog zum Volumenstrom in einem Rohr.

Kelvinscher Wirbelsatz

In einer reibungsfreien, barotropen Strömung mit konservativen Kräften ist die Zirkulation einer mitbewegten materiellen Kurve (Ansammlung an Fluidelementen die immer gleich bleibt) zeitlich konstant,

$$\frac{D\Gamma_m}{Dt} = 0.$$

Unter diesen Bedingungen entsteht und verschwindet keine Wirbelstärke, eine aus der Ruhe gestartete Strömung bleibt drehungsfrei.

Folgerung (eingefrorene Wirbellinien). Unter denselben Voraussetzungen bewegen sich Wirbellinien mit dem Fluid mit, als wären sie eingefroren. Fluidelemente, die einmal eine Wirbellinie bilden, tun dies für alle Zeiten.

Key Learning

Key Learnings.

- **Helmholtz:** Die Zirkulation ist konstant längs einer Wirbelröhre, Wirbelröhren enden nie im Fluid.
- **Kelvin:** Zirkulation einer materiellen Kurve bleibt erhalten, solange die Strömung reibungsfrei und barotrop ist und nur konservative Kräfte wirken.
- Neue Wirbelstärke entsteht erst, wenn eine dieser Voraussetzungen verletzt ist, also durch Reibung an Wänden, durch barokline Effekte oder durch nichtkonservative Kräfte.

3.9 Tragflügel und induzierter Widerstand

Aus dem vorherigen Kapitel kennen wir die Auftriebsformel nach Kutta-Joukowski, die besagt, dass die Auftriebskraft auf der Zirkulation Γ um das Profil beruht: $F_y = -\rho u_\infty \Gamma b$. Dieser Fall galt allerdings für unendliche lange Profile, was wir im Realen nicht haben.

↪ S. 89–91

Stellt man sich einen endlichen Tragflügel mit Zirkulation Γ vor, kann man vereinfacht annehmen einen Wirbelfaden konstanter Zirkulation vorliegen zu haben.

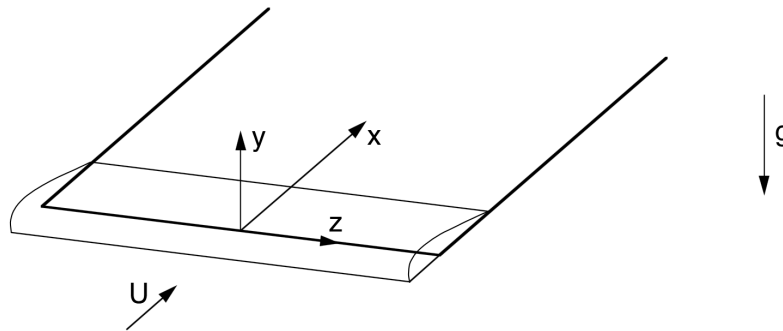


Abbildung 3.4: Umströmung eines Tragflügels

Wie wir aber beim Satz von Helmholtz gelernt haben, kann ein Wirbelfaden nicht plötzlich im Feld enden (also nicht einfach am Flügelende). Ein gutes Modell hierfür ist der **Hufeisenwirbel**: Ein gebundener Wirbel (auf dem Tragflügel) geht über in zwei freie Randwirbel derselben Zirkulation Γ . Diese können entweder als halbumendlich angenommen werden, oder es existiert auch ein Startwirbel, der die Wirbelröhre schließt:

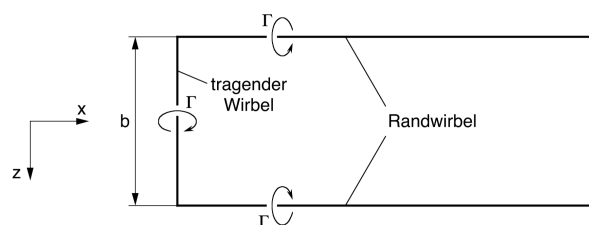


Abbildung 3.5: Hufeisenwirbel als Modell des Tragflügels: gebundener Wirbel und zwei Randwirbel.

Diese Randwirbel induzieren am Flügel und im Feld dahinter einen *Abwind*, der die Anströmungsgeschwindigkeit nach unten kippt. Dies hat den **induzierten Widerstand** zur Folge, der zusätzlich zu realen Effekten wie Reibung und Strömungsablösung eine bremsende Wirkung hat. Er ist der Preis des Auftriebs am endlichen Flügel, denn ohne Auftrieb keine Randwirbel und ohne Randwirbel kein Abwind. Mehr Informationen dazu können im Skript gefunden werden.

Key Learning

In realen Bedingungen mit endlichen Flügeln erleben wir nicht nur Randwirbel, die einen Abwind erzeugen, sondern auch den von ihnen **induzierten Widerstand**.

3.9.1 Bodeneffekt

Eine feste Wand wird durch ein gespiegeltes Wirbelsystem ersetzt, sodass am Boden $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ gilt. Das Spiegelbild induziert am Original eine Zusatzgeschwindigkeit und verändert dessen Bewegung.

Key Learning

Tragflügel: In Bodennähe schwächt das Spiegelbild den Abwind der Randwirbel ab. Dadurch sinkt der induzierte Widerstand und der Auftrieb steigt, weshalb Flugzeuge kurz vor der Landung förmlich schweben.

3.9.2 Wirbelringe

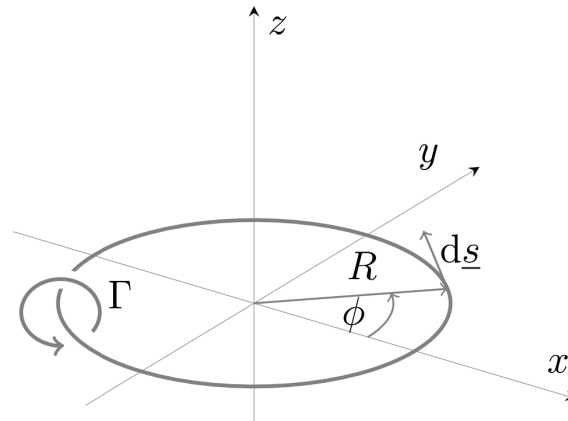
Key Learning

Wirbelringe (geschlossene Kurven konstanter Zirkulation) induzieren Geschwindigkeiten nur auf ihren Mittelpunkt und alle anderen Punkte ausserhalb sich selbst. Ein Wirbelring kann sich also erst in Grösse, Richtung und Geschwindigkeit richtig verändern, wenn ein weiterer Ring im Spiel ist (oder eine Wand).

Aufgabe: *Wirbelring senkrecht (3.4), Wirbelring parallel (3.5)*

Aufgabe 3.1 – Wirbelring (Extra-Aufgabe 4)

Ein Wirbelring wird als kreisförmiger Wirbelfaden mit Radius R und Zirkulation $\Gamma > 0$ in der xy -Ebene modelliert. Die Fortbewegungsgeschwindigkeit entspricht der im Mittelpunkt induzierten Geschwindigkeit.



- a) Berechnen Sie mit Biot-Savart die im Zentrum induzierte Geschwindigkeit. *Hinweis: Je nach Lösungsweg könnten folgende Dinge hilfreich sein:*

$$\underline{R}(\phi) = \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{pmatrix}, \quad d\underline{s} = \frac{\partial \underline{R}}{\partial \phi} d\phi, \quad |\underline{r}|^3 = (\underline{r}^2)^{3/2}.$$

- b) In welche Richtung bewegt sich der Ring, und welcher Ring (kleiner oder grösser) bewegt sich bei gleicher Zirkulation schneller?

Lösung.

- a) 1. Lösungsweg: mit dem Hinweis, in kartesischen Koordinaten

$$\underline{R}(\phi) = \begin{pmatrix} R \cos \phi \\ R \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad d\underline{s} = \begin{pmatrix} -R \sin \phi d\phi \\ R \cos \phi d\phi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mit $\underline{r} = -\underline{R}$ folgt

$$|\underline{r}|^2 = (R \cos \phi)^2 + (R \sin \phi)^2 = R^2 \quad \Rightarrow \quad |\underline{r}|^3 = R^3.$$

Damit ergibt sich

$$d\underline{s} \times \underline{r} = \begin{pmatrix} -R \sin \phi d\phi \\ R \cos \phi d\phi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -R \cos \phi \\ -R \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R^2 d\phi \end{pmatrix}.$$

2. Lösungsweg: in Polarkoordinaten

$$d\underline{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ R d\phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{r} = \begin{pmatrix} -R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\underline{r}|^3 = R^3.$$

$$\underline{ds} \times \underline{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ R d\phi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R^2 d\phi \end{pmatrix}.$$

Mit dem Gesetz von Biot–Savart folgt

$$\begin{aligned} \underline{u}(\underline{x}) &= \frac{\Gamma}{4\pi} \int_C \frac{\underline{ds} \times \underline{r}}{|\underline{r}|^3}. \\ \underline{u}(\underline{x}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{\Gamma}{4\pi} \int_C \frac{R^2}{R^3} d\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{\Gamma}{4\pi R} \int_0^{2\pi} d\phi. \end{aligned}$$

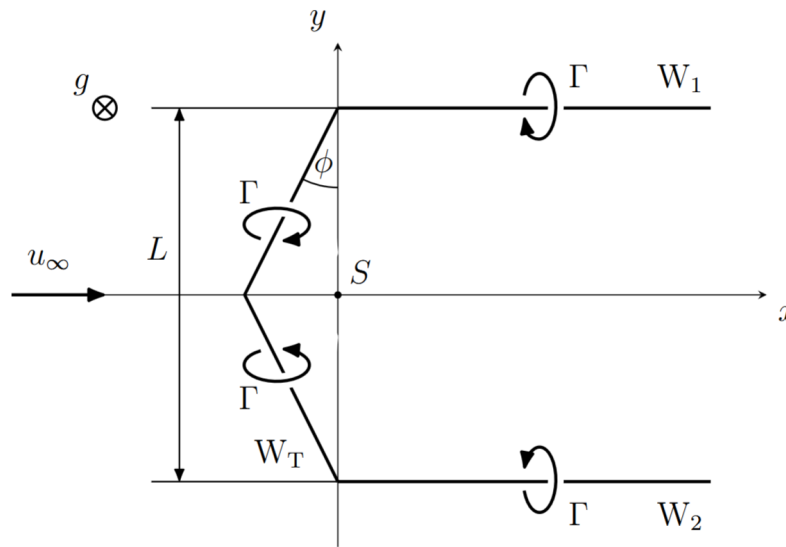
$$\boxed{\underline{u}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{\Gamma}{2R}}.$$

- b) Der Wirbelfaden bewegt sich in positiver z -Richtung vorwärts. Da $\underline{u}(\underline{x}) \sim \frac{1}{R}$, bewegt sich ein Wirbelfaden mit kleinerem Durchmesser schneller als ein Wirbelfaden mit grösserem Durchmesser.

Aufgabe 3.2 – Hufeisenwirbel eines Hängegleiters (Prüfung FS2025, Aufgabe 3)

Ein Hängegleiter fliegt mit konstanter Geschwindigkeit u_∞ . Er wird als ein um den Winkel φ gepfeilter tragender Wirbelfaden W_T der Breite L in der xy -Ebene modelliert. Das Wirbelsystem besteht neben W_T aus zwei halb-unendlichen Wirbelfäden W_1 und W_2 . Alle Fäden tragen die Zirkulation Γ . Der Punkt S fällt mit dem Ursprung zusammen, $\mathbf{z}_S = (0, 0, 0)^T$. Die Schwerkraft wirkt in negativer z -Richtung.

- Warum ist die Zirkulation in allen Fäden gleich gross?
- Bestimmen Sie die im Punkt S von W_1 und W_2 induzierten Geschwindigkeiten $\mathbf{u}_{W_1}$ und $\mathbf{u}_{W_2}$.
- Bestimmen Sie die im Punkt S vom tragenden Wirbel W_T induzierte Geschwindigkeit $\mathbf{u}_T$.

**Lösung.**

- Nach dem Helmholtzschen Wirbelsatz ist die Zirkulation längs eines Wirbelfadens konstant.
- W_1 und W_2 sind gerade, halb-unendliche Wirbelfäden im senkrechten Abstand $r = \frac{L}{2}$ von S . Für einen geraden Faden gilt nach Biot-Savart

$$u_\theta = \frac{\Gamma}{4\pi r} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2).$$

Vergleicht man die Situation mit der Abbildung aus dem Skript erkennt man sofort, dass ($\theta_1 = \pi/2$) und dem ins Unendliche laufenden Ende ($\theta_2 = \pi$) folgt

$$u_\theta = \frac{\Gamma}{4\pi (L/2)} (\cos(\frac{\pi}{2}) - \cos(\pi)) = \frac{\Gamma}{2\pi L}.$$

Beide Randfäden induzieren in S einen Abwind in die angegebene Richtung ($-\underline{e}_z$):

$$\mathbf{u}_{W_1} = \mathbf{u}_{W_2} = -\frac{\Gamma}{2\pi L} \underline{e}_z.$$

- Für den tragenden Wirbel W_T kann man wieder die Abbildung aus dem Skript zur Hilfe nehmen, wobei wir nun eine Abhängigkeit von ϕ haben. Der senkrechte Abstand zu S beträgt

$r = \frac{L}{2} \sin \phi$, und die Endwinkel sind $\theta_1 = \phi$ sowie $\theta_2 = \phi + \frac{\pi}{2}$. Mit $\cos(\phi + \frac{\pi}{2}) = -\sin \phi$ folgt

$$u_T = \frac{\Gamma}{4\pi (L/2) \sin \phi} (\cos \phi - \cos(\phi + \frac{\pi}{2})) = \frac{\Gamma}{2\pi L} \frac{\cos \phi + \sin \phi}{\sin \phi},$$

ebenfalls in negativer z -Richtung:

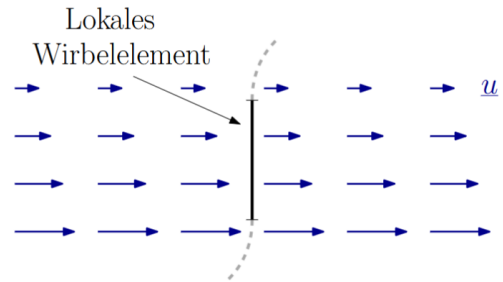
$$\mathbf{u}_T = -\frac{\Gamma}{2\pi L} \frac{\cos \phi + \sin \phi}{\sin \phi} \mathbf{e}_z.$$

Die Summe aller vier Beiträge ergibt den Gesamtabwind aus Extra-Aufgabe 5.

Aufgabe 3.3 – Lokales Wirbelelement (Prüfung FS24, MC)

Welche Aussagen treffen für das eingezeichnete lokale Wirbelelement zu?

- (a) Das Wirbelelement wird instantan gestreckt.
- (b) Der Wirbelstreckungsterm $(\underline{\omega} \cdot \nabla) \underline{u}$ ist parallel zur Strömung ausgerichtet.
- (c) Das Wirbelelement kippt instantan.
- (d) Es gilt $\underline{u} \cdot \underline{\omega} = 0$.



Lösung: (Skript S. 85)

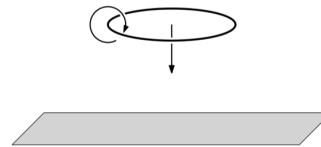
Richtig: b, c, d

Falsch: a

Aufgabe 3.4 – Wirbelring senkrecht zur Wand (Prüfung HS19, MC)

Ein Wirbelring bewege sich zum Zeitpunkt $t = 0$ *senkrecht* auf eine sich in der Nähe befindliche Wand zu. Was bewirkt der Einfluss der Wand?

- (a) Der Wirbelring wird langsamer.
- (b) Der Wirbelring kippt.
- (c) Der Wirbelring wird grösser.
- (d) Die Wand hat keinen Einfluss.



Lösung: (Skript S. 66 (Spiegelung))

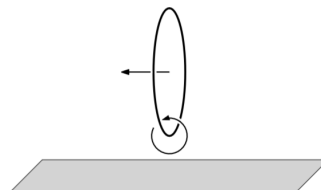
Richtig: a, c

Falsch: b, d

Aufgabe 3.5 – Wirbelring parallel zur Wand (Prüfung HS19, MC)

Ein Wirbelring bewege sich zum Zeitpunkt $t = 0$ *parallel* zu einer in der Nähe befindlichen Wand. Was bewirkt der Einfluss der Wand?

- (a) Der Wirbelring wird langsamer.
- (b) Der Wirbelring kippt.
- (c) Der Wirbelring wird kleiner.
- (d) Die Wand hat keinen Einfluss.



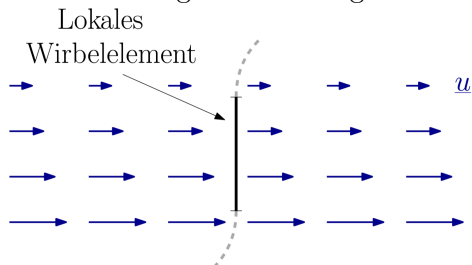
Lösung: (Skript S. 66 (Spiegelung))

Richtig: a, b

Falsch: c, d

Aufgabe 3.6 – Lokales Wirbelement und Wirbeltransport (Prüfung HS19, MC)

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?



- a) Das rechts gezeichnete lokale Element einer Wirbellinie hat einen verschwindenden Wirbelstreckungsterm $W := (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{u}$.
- b) Die Geschwindigkeit des Rankine-Wirbels ist monoton.
- c) In einer 2D-Strömung ist $(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \mathbf{0}$.
- d) Konservative Kräfte in den Navier-Stokes-Gleichungen ergeben keinen Beitrag zur Wirbeltransportgleichung.

Lösung: (Skript S. 84–85)

Richtig: c, d

Falsch: a, b

KAPITEL 4

Kompressible Strömungen

Dieses Kapitel beinhaltet viele Konzepte aus der Thermodynamik und strotzt nur so vor grossen und kompliziert aussehenden Gleichungen. Das Gute ist, dass wir uns diese einerseits nicht merken müssen, sondern im offiziellen Skript ablesen können. Andererseits werden wir viele dieser Gleichungen gar nicht explizit benutzen, da wir Tabellen im Anhang haben, welche die Gleichungen bereits ausgewertet haben. Wichtig zu wissen ist, dass wir uns eigentlich immer Luft als ideales Gas anschauen, und deshalb alle Tabellenwerte für Luft gegeben sind. Die thermodynamischen Grundlagen sind zwar eine Voraussetzung für das Verständnis, müssen aus meiner Sicht aber nicht perfekt gemeistert sein, um das Thema hier zu meistern.

Es ist trotzdem von grösster Wichtigkeit, dass ihr euch im offiziellen Skript auskennt und wisst, wo welche Gleichungen und Grössen stehen, da es doch eine rechte Menge ist.

↪ Kap. 11, Tabellen Anhang E

4.1 Phänomenologie

In allen bisherigen Kapiteln haben wir die Dichte meistens als konstant angenommen. Das ist zulässig, solange das Fluid langsam gegenüber seiner eigenen Schallgeschwindigkeit strömt. Sobald aber stark beschleunigt wird, ändert sich der Druck so deutlich, dass auch die Dichte merklich nachgibt. Damit bricht die Annahme $\rho = \text{const}$ zusammen und die Temperatur wird zu einer eigenständigen Strömungsgrösse. Bei kompressiblen Strömungen wird die innere Energie berücksichtigt, und die Thermodynamik kommt mit ins Spiel.

Anschaulich verhalten sich kompressible Strömungen zu inkompressiblen wie elastische zu starren Körpern. Eine kleine Störung macht sich nicht mehr sofort überall bemerkbar, sondern läuft mit endlicher Signalgeschwindigkeit durch das Fluid. Diese Signalgeschwindigkeit ist die **Schallgeschwindigkeit** a , und sie hängt vom lokalen Zustand des Gases/Fluids ab.

Die zentrale dimensionslose Kennzahl ist die **Mach-Zahl** $\text{Ma} = \frac{u}{a}$, das Verhältnis von Strömungs- zu Schallgeschwindigkeit.

Key Learning

Regime nach der Mach-Zahl:

- $\text{Ma} < 1$: **Unterschall**, Störungen können sich noch stromauf ausbreiten. Für $\text{Ma} \leq 0.3$ darf man in guter Näherung inkompressibel rechnen.
- $\text{Ma} \approx 1$: **Transsonischer** Bereich, gemischt mit lokalen überschallgebieten.
- $\text{Ma} > 1$: **Überschall**, Störungen laufen der Strömung nicht mehr voraus. Hier treten Stösse und Expansionsfächer auf.
- $\text{Ma} > 5$: **Hyperschall**, das Modell des idealen Gases versagt langsam.

4.2 Zustandsgrößen und Ruhegrößen

Wir möchten uns verschiedene Strömungen anschauen und müssen dafür wissen, wie sich Strömungsgrößen wie Temperatur, Geschwindigkeit, etc. entlang der Strömung ändern. Hier kommt die (isentrop) Stromfadentheorie ins Spiel wie unten beschrieben. Wichtig zu erwähnen ist, dass im Skript noch sehr viel mehr Formeln stehen, die wichtig für isentrope Strömungen sind. Schaut euch diese genau an, so zum Beispiel die Isentropenbeziehungen oder Energieerhaltung.

↪ S. 93–96

Key Learning

Voraussetzungen der Stromfadentheorie: **perfektes Gas** (thermisch und kalorisch ideal, $p = \rho RT$, $c_p, c_v = \text{const}$), quasi-eindimensional (Geschwindigkeit nur in Fließrichtung), stationär, reibungsfrei und adiabat. Unter diesen Annahmen ist die Strömung **isentrop**, ausser über auftretende Verdichtungsstöße (später). Isentrop heisst reibungs- und stossfrei, nicht isotherm oder inkompressibel.

Die Schallgeschwindigkeit folgt aus der isentropen Zustandsänderung und ist keine Stoffkonstante, sondern wächst mit der Temperatur. Mit ihr definieren wir die Mach-Zahl.

Key Formula

Schallgeschwindigkeit, Mach-Zahl:

$$a = \sqrt{\gamma RT} = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}, \quad \text{Ma} = \frac{u}{a}.$$

Für Luft: $R = 287 \text{ J/(kg K)}$, $\gamma = 1.4$, $c_p = 1005 \text{ J/(kg K)}$.

Ein besonders nützlicher Bezugszustand ist der sogenannte **Ruhezustand**, wo $u = 0$. Er wird mit dem Index 0 gekennzeichnet. Verlangsamt man eine Strömung isentrop zum Beispiel auf einen Staupunkt herrschen dort dann die Ruhegrößen, wie T_0, p_0, h_0 , oder ρ_0 . Damit finden wir Gleichungen, die uns Zustandsgrößen an einem beliebigen Ort in Abhängigkeit von der Mach-Zahl und der Ruhegrösse geben. Unten der Fall für Temperatur. Weitere Fälle für Druck, Dichte und Schallgeschwindigkeit findet man im Skript. Ausserdem sind diese Verhältnisse für verschiedene Mach-Zahlen (und immer für Luft) im Anhang in Tabellen aufgelistet, was uns viel Rechenarbeit erspart

↪ S. 99, Tabellen Anhang E

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} \text{Ma}^2.$$

Ein weiterer spezieller Zustand ist der sogenannte **Kritische Zustand** (auch Schallzustand). Dort gilt $u = a$ und damit $\text{Ma} = 1$ und er wird mit dem Index * gekennzeichnet (T_*, p_*, ρ_*, a_* , etc.). Isentrope Stromfäden haben eine eindeutige Zuordnung von diesen Zustandsgrößen, egal ob diese in der Strömung tatsächlich erreicht werden oder nicht (soll heissen: ob wir grade bei $\text{Ma} = 0.5$ oder $\text{Ma} = 1.5$ sind, die kritischen und Ruhegrößen bleiben gleich, sofern nur eine isentrope Veränderung stattgefunden hat).

Setzt man in die Relationen von oben den kritischen Zustand $Ma = 1$ ein, ergeben sich die **kritischen Verhältnisse**, die nur von γ abhängen und damit für ein gegebenes Gas feste Zahlen sind. Das Beispiel für die Temperatur wieder hier, wobei die anderen Beziehungen im Skript gefunden werden können.

↪ S. 100

$$\frac{T^*}{T_0} = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)$$

Key Formula

Wichtige Relationen (Formeln im Skript und Anhang):

- **Ruhegrößen Verhältnisse** $\frac{X_0}{X(Ma)}$, verbindet den Ruhezustand einer Grösse X_0 mit der lokalen Zustand X , abhängig von der lokalen Mach-Zahl (S.99).
- **Kritische Verhältnisse** $\frac{X_*}{X_0}$, verbindet den kritischen Zustand X_* mit dem Ruhezustand X_0 , wobei $Ma = 1$ (S. 100)

Alle sind für $0 \leq Ma \leq 5$ im Skript tabelliert.

↪ S. 99–100, Tabellen Anhang E

4.3 Senkrechter Verdichtungsstoss

Schaut man sich einen isentropen Stromfaden mit konstantem Querschnitt an, gelten an zwei benachbarten Punkten 1 und 2 die **Kontinuität**, **Impulserhaltung** und **Energieerhaltung**. Diese Gleichungen müssen stets erfüllt sein. Es gibt dabei eine unstetige Lösung, um von Zustand 1 auf 2 zu gelangen: Der Verdichtungsstoss. Wir werden uns die Implikationen genauer anschauen, wichtig ist aber, dass ein Stoss ein mathematisch zulässiges und physikalisch reales Phänomen ist, die Stossdicke quasi vernachlässigbar ist (deshalb *unstetig*), und der Stoss **nicht isentrop** ist.

↪ S. 101–104

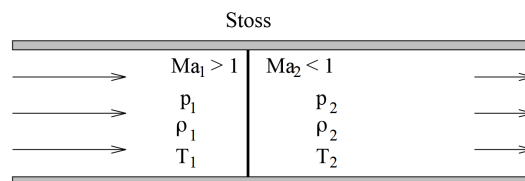


Abbildung 4.1: Senkrechter Verdichtungsstoss (schematisch): Zustand 1 (überschall) vor, Zustand 2 (Unterschall) nach dem Stoss.

Key Learning

Folgende Dinge gelten für einen Stoss:

- Führt **immer** von **Überschall** ($Ma > 1$) in den **Unterschall** ($Ma < 1$). **IMMER**
- Über einen Stoss **steigen** folgende Größen:
 - Druck $p \uparrow$
 - Dichte $\varrho \uparrow$
 - Temperatur $T \uparrow$
 - Entropie $s \uparrow$
- Über einen Stoss **sinken** folgende Größen:
 - Geschwindigkeit $u \downarrow$
 - Mach-Zahl $Ma \downarrow$
 - Ruhedruck $p_0 \downarrow$
- Über einen Stoss **bleiben** folgende Größen **gleich**:
 - Ruhetemperatur T_0 (und damit T_* , a_0 , a_*)

Wie genau sich diese Größen ändern, ist durch etliche Gleichungen beschrieben. So wird zum Beispiel jeder Mach-Zahl vor dem Stoss $Ma_1 > 1$ eine genaue Mach-Zahl nach dem Stoss $Ma_2 < 1$ zugeschrieben. Als Beispiel einer solchen Gleichung hier die für Temperatur, wobei der Index 2 immer für nach dem Stoss steht:

↔ S. 101–105

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} Ma_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right) \left(\frac{2}{\gamma+1} \frac{1}{Ma_1^2} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right)$$

Wir sehen dass diese Ausdrücke sehr lang und mühsam zum Ausrechnen sein können. Genau deshalb wollen wir diese eigentlich vermeiden, und hauptsächlich mit den Tabellen arbeiten, welche uns genau diese Verhältnisse angeben. **Wichtig:** Wenn ein Wert nicht ganz genau in der Tabelle steht, dürfen wir einfach den nächsten Nachbar nehmen, anstatt linear zu interpolieren!

Ganz wichtig zu erwähnen ist ebenfalls, dass sich die Ruhegrösse über Stösse auch ändern, hervorgerufen durch die Entropiezunahme. Auch diese Verhältnisse sind in den Tabellen angegeben. Folgendes gilt:

Key Formula

$$\frac{\varrho_{02}}{\varrho_{01}} = \frac{p_{02}}{p_{01}}, \quad T_{02} = T_{01}$$

↔ Tabellen Anhang E

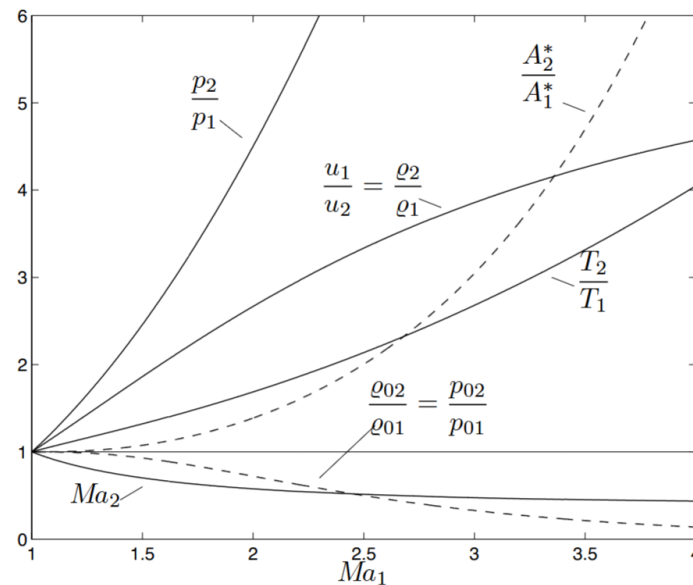


Abbildung 4.2: Zustandsänderungen über den senkrechten Stoss: $\frac{p_2}{p_1}$, $\frac{\rho_2}{\rho_1}$, Ma_2 und $\frac{p_{02}}{p_{01}}$ über Ma_1 .

Prüfungstipp

In der Prüfung würde ich empfehlen die Zeilen aus der Tabelle, die ihr braucht, anzumalen. Das erspart euch jedes mal neu zu suchen!

Beispiel: Senkrechter Stoss

Aufgabe. Luft strömt mit $Ma_1 = 2$, $p_1 = 0.5$ bar, $T_1 = 250$ K gegen einen senkrechten Stoss. Gesucht: Mach-Zahl, Druck und Temperatur dahinter, Ruhedruckverhältnis und Entropiezunahme.

Schritt 1: Stosstabelle bei $Ma_1 = 2$ ablesen. Man entnimmt

$$Ma_2 = 0.577, \quad \frac{p_2}{p_1} = 4.50, \quad \frac{p_{02}}{p_{01}} = 0.721.$$

Schritt 2: Größen hinter dem Stoss.

$$p_2 = 4.50 \cdot p_1 = 2.25 \text{ bar}, \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1)Ma_1^2}{(\gamma - 1)Ma_1^2 + 2} = 2.667,$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2} = 1.687 \Rightarrow T_2 \approx 422 \text{ K}.$$

Alternativ können auch alle dieser Verhältnisse aus der Tabelle abgelesen werden.

Schritt 3: Entropiezunahme aus dem Ruhedruckverhältnis.

$$\Delta s = -R \ln \frac{p_{02}}{p_{01}} = -R \ln(0.721) \approx 93.9 \text{ J/(kg K)} > 0,$$

was sicher notwendig ist, da ein Stoss nicht isentrop ist. Hier wurde die Formel von S.94 unten eingesetzt. Alternativ könnte man auch die Formel von S. 103 oben nehmen.

4.4 Düse mit veränderlichem Querschnitt

Nun wieder zum isentropen Stromfaden, diesmal mit veränderlichem Querschnitt $A(x)$. Wegen der Massenerhaltung wissen wir, dass sich bei kleinerem Querschnitt die Geschwindigkeit erhöhen muss. Diese Berechnung und Intuition gilt allerdings nur für $Ma < 1$. Befindet man sich jedoch in einer Überschallströmung $Ma > 1$, so beschleunigt man wenn der Querschnitt grösser wird. Dieses Phänomen kann hergeleitet werden und ist im Skript zu sehen.

↪ S. 105

Bei einer Laval-Düse wird eine Strömung zuerst im konvergenten Teil beschleunigt, bis sie im kritischen Querschnitt A_* Schallgeschwindigkeit $Ma = 1$ erreicht. Anschliessend wird sie im divergenten Teil auf Überschall weiter beschleunigt.

Durch Umformungen, erhalten wir die **Flächen-Mach-Zahl-Beziehung**. Diese erlaubt es uns, das Verhältnis von lokalem Querschnitt zu kritischem Querschnitt mit der lokalen Mach-Zahl zu verbinden. Anders gesagt: Kennt man $\frac{A}{A_*}$, so kennt man auch Ma . Die Gleichung dazu findet ihr im Skript, aber die Verhältnisse sind ebenfalls bereits in der Tabelle zu finden.

↪ S. 106, Tabellen Anhang E

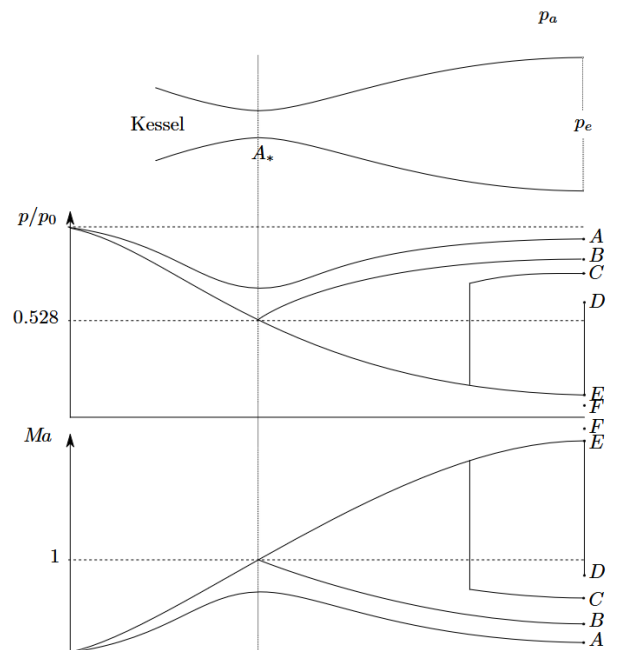


Abbildung 4.3: Laval-Düse und Mach-Zahl-Verlauf bei verschiedenen Gegendrücken.

Schauen wir uns nun die Situation der Laval-Düse etwas genauer an. In Abbildung 4.4 sehen wir verschiedene Situationen, abhängig vom Verhältnis des Ruhedrucks zum Aussendruck $\frac{p_0}{p_a}$. Wichtig ist, dass wir hier auch Sprünge in den Plots sehen, welche Verdichtungsstößen entsprechen.

Welcher Zustand sich tatsächlich einstellt, hängt vom Verhältnis aus Kessel- und Aussendruck p_0/p_a ab. Senkt man den Gegendruck p_a schrittweise ab, durchläuft die Düse die Fälle A bis F. Die folgende Übersicht fasst sie kompakt zusammen, die Details stehen im Skript. Wichtig ist, dass wenn der Austrittsdruck der Düse p_e nicht dem Umgebungsdruck p_a entspricht, es immer zu irgendwelchen Anpassungen der Strömung kommt, damit es gewährleistet werden kann.

↪ S. 107–109

Fall	Strömungszustand
A	Der Aussendruck ist nicht tief genug, sodass reine Unterschallströmung in der ganzen Düse herrscht. Die höchste Geschwindigkeit ist an der engsten Stelle, im Hals.
B	Im Hals wird erstmals $Ma = 1$ erreicht, aber der Aussendruck ist noch zu hoch dass wir in den Überschall gehen. Der Massenstrom ist maximal, die Düse gesperrt (<i>choked</i>) und reagiert stromauf nicht mehr auf p_a .
C	Senkrechter Verdichtungsstoss im divergenten Teil, der die Strömung auf Unterschall verlangsamt, sodass der Druck am Austritt dem Umgebungsdruck entspricht $p_e = p_a$ (Durch die Beschleunigung wird p immer weiter abgesenkt, muss aber am Schluss dem Umgebungsdruck entsprechen).
D	Der Stoss ist bis ans Düsenende gewandert, $p_e = p_a$.
$E < p_a < D$	Überexpandiert: isentroper überschall bis zum Austritt, aber $p_e < p_a$. Die Anpassung erfolgt durch schiefe Stösse <i>ausserhalb</i> der Düse.
E	Ideal angepasst, $p_e = p_a$, paralleler überschallstrahl.
F	Unterexpandiert: $p_e > p_a$, die Anpassung erfolgt durch Expansionsfächer <i>ausserhalb</i> der Düse.

Der sogenannte **Choked Flow** tritt auf, sobald im engsten Querschnitt $Ma = 1$ erreicht wird. Erinnern wir uns daran, dass sich Informationen in einem Kontinuum mit Schallgeschwindigkeit ausbreiten. Wollen wir also dem konvergenten Teil der Düse mitteilen, dass sich der Aussendruck verändert hat, muss diese Information entgegen der Strömungsrichtung laufen.

Ist die Strömung allerdings gleich schnell oder sogar schneller als die Information, kann diese nicht mehr nach links gelangen. Die Strömung vor dem engsten Querschnitt kann deshalb durch eine weitere Absenkung des Aussendruckes nicht mehr beeinflusst werden.

Stellt euch vor, ihr seid auf einem Laufband und rennt genau gleich schnell wie das Band: Dann bleibt ihr an derselben Stelle. Wird das Band noch schneller, werdet ihr sogar wieder nach hinten getragen.

Key Learning

Ab $Ma > 1$ bewirkt eine Querschnittserweiterung auch eine Geschwindigkeitserhöhung. Ist am engsten Querschnitt einer Düse $Ma = 1$ erreicht, so befindet sich die Strömung im Choked Flow, und ein weiteres Absenken des Aussendruckes hat keinen Einfluss auf die Strömung aufwärts des Throats.

Aufgabe: Laval-Düse mit senkrechtem Stoss (4.1)

4.5 Schiefer Verdichtungsstoss

Wird eine überschallströmung an einer *blockierenden (konkaven)* Ecke umgelenkt, etwa an einer in den Weg ragenden Rampe oder an einem Keil, so muss sie sich verdichten. Sie tut dies nicht über einen senkrechten, sondern über einen **schiefen Stoss**, dessen Front gegenüber der Anströmung um den Stossfrontwinkel β geneigt ist. Die Strömung wird dabei um den Umlenkwinkel θ in die neue Wandrichtung gedreht, wobei stets $\beta > \theta$ gilt.

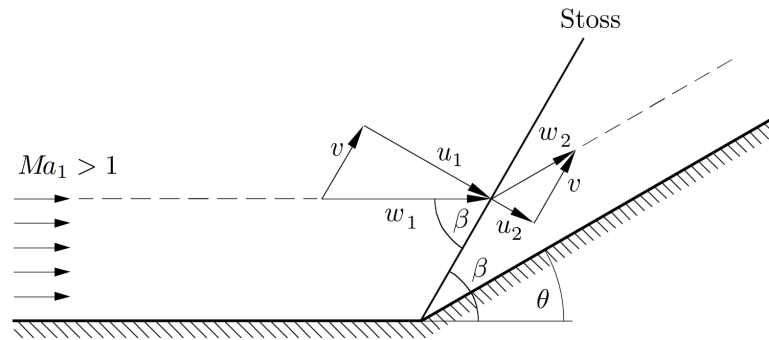


Abbildung 4.4: Geometrie des schiefen Stosses: Rampe mit Umlenkung θ und Stoss unter dem Frontwinkel β .

Der entscheidende Trick ist, dass man den schiefen Stoss auf den bereits bekannten senkrechten zurückführt. Zerlegt man die Geschwindigkeit in eine Komponente normal und eine tangential zur Stossfront, so bleibt die Tangentialkomponente erhalten und nur die Normalkomponente erfährt einen senkrechten Stoss. Jedes Strömungsgrößenverhältnis über den Stoss wird dann abhängig von den Normalkomponenten gebildet. Die Tabellen können also weiterhin benutzt werden, als Mach-Zahlen müssen jedoch die **Normalkomponenten** eingesetzt werden.

Der wichtigste Unterschied zum senkrechten Stoss ist, dass die Strömung dahinter überschall bleiben kann ($Ma_2 > 1$), weil nur die Normalkomponente in den Unterschall fällt.

↪ S. 109–111

Key Formula

Mit Stossfrontwinkel β und Umlenkwinkel θ :

$$Ma_{n1} = Ma_1 \sin \beta (> 1), \quad Ma_{n2} = Ma_2 \sin(\beta - \theta) (< 1),$$

Zu jeder Mach-Zahl gehört ein maximaler Umlenkwinkel (Für $Ma \rightarrow \infty, \theta_{\max} \approx 45^\circ$). Wird der Keilwinkel grösser, existiert kein gerader Stoss mehr, er hebt vom Körper ab und wird gekrümmt (*detached shock*). Für jeden Winkel darunter ($\theta < \theta_{\max}$) gibt es zwei Lösungen: eine schwache (kleines β , meist Überschall dahinter, tritt in der Regel auf) und eine starke (grosses β , Unterschall dahinter).

Im sogenannten **Stossdiagramm** wird die $\theta - \beta - Ma$ -Relation dargestellt. Aus zwei der Grössen kann die Dritte abgelesen werden. Für dieses Diagramm lohnt es sich ein Lineal oder ähnliches an der Prüfung dabei zu haben!

↪ S. 145

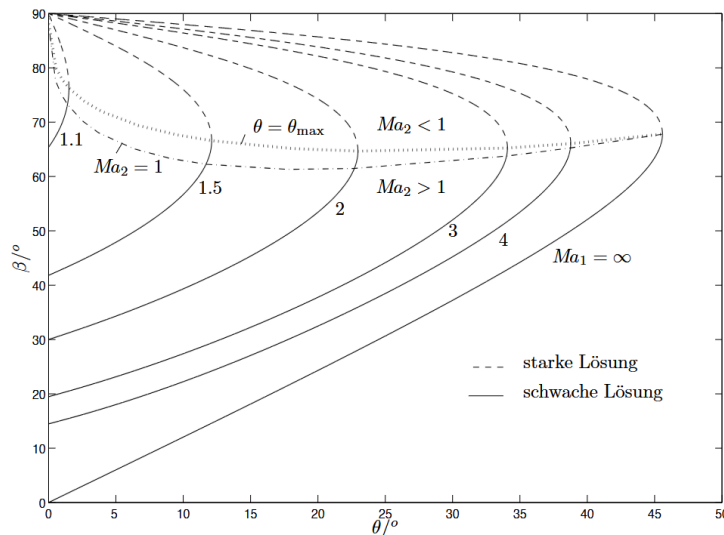


Abbildung 4.5: Stosssdiagramm θ - β : zu jedem Umlenkwinkel gehören eine schwache (unten) und eine starke (oben) Lösung.

Aufgabe: Symmetrisches Keilprofil im übershall (4.2)

4.6 Prandtl-Meyer-Expansion

Das Gegenstück zum schiefen Stoss tritt an einer *erweiternden* (*konveren*) Ecke auf. Dort kann sich die übershallströmung nicht verdichten, sondern muss expandieren, um der wegnickenden Wand zu folgen. Die Übershallströmung wird durch die Expansion und Umlenkung des winkels θ auf eine **höhere Mach-Zahl beschleunigt**. θ ist der sogenannte **Prandtl-Meyer-Winkel**.

$$Ma_2 > Ma_1, \quad p_2 < p_1, \quad \varrho_2 < \varrho_1, \quad T_2 < T_1$$

Physikalisch geschieht das über einen **Fächer** aus unendlich vielen Machschen Wellen (Linien die im Eckpunkt zusammenlaufen). Jede dieser Linien dreht und beschleunigt die Strömung infinitesimal. Da jede dieser Wellen verschwindend schwach ist, läuft der gesamte Vorgang stetig und **isentrop** ab. Es entsteht also kein Entropiesprung und kein Ruhedruckverlust.

↪ S. 112–114

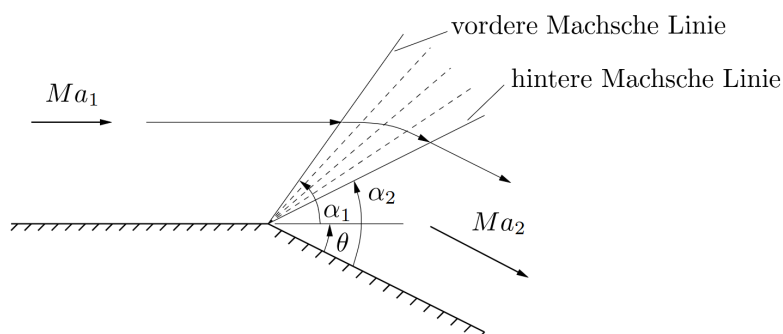


Abbildung 4.6: Prandtl-Meyer-Expansionsfächer an einer konvexen Ecke.

Key Learning

Eine Prandtl-Meyer-Expansion beschleunigt eine Strömung Isentrop auf eine noch höhere Mach-Zahl. Strömungsgrößen wie Temperatur und Druck können daher mit Hilfe der isentropen Beziehungen berechnet werden.

Auch hier existiert eine Beziehung, welche die gegebenen Größen verbindet:

$$\theta = \nu(\text{Ma}_2) - \nu(\text{Ma}_1)$$

$\nu(\text{Ma})$ ist dabei die **Prandtl-Meyer-Funktion** (definiert im Skript). Ihren Verlauf sieht man in Abbildung 4.6. In der Praxis liest man ν aus Anhang E ab. Kennt man also zwei der obigen Größen, lässt sich wieder die Dritte bestimmen.

↔ S. 146

Key Formula

Umlenkung und Prandtl-Meyer-Funktion:

$$\theta = \nu(\text{Ma}_2) - \nu(\text{Ma}_1),$$

$$\sin \alpha_1 = \frac{1}{\text{Ma}_1}, \quad \sin \alpha_2 = \frac{1}{\text{Ma}_2}$$

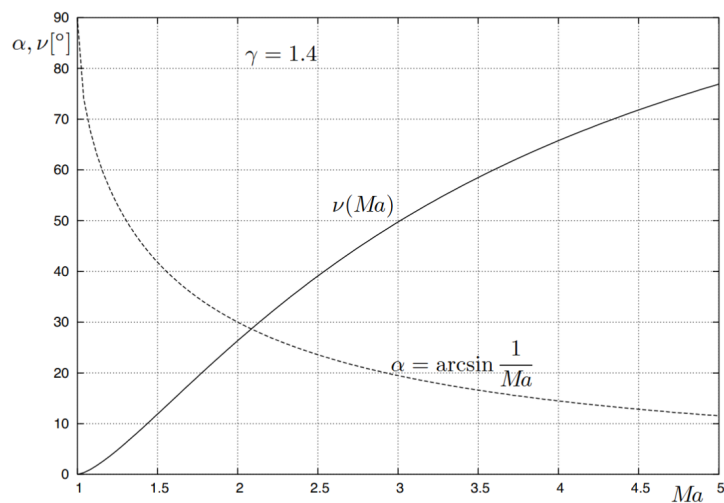


Abbildung 4.7: Prandtl-Meyer-Funktion $\nu(\text{Ma})$, in Anhang E tabelliert.

Aufgabe: Rampe mit Stoss und Expansion (4.3)

4.7 Wellenwiderstand

In einer reibungsfreien Überschallströmung ergibt sich für eine angestellte Platte ein Widerstand, der **Wellenwiderstand**. Er lässt sich erklären durch die nicht-isentropen Stöße die auftreten und den damit verbundenen Verlust. Er tritt zu den bereits bekannten Widerständen hinzu, weshalb Überschallflug eine sehr hohe Antriebsleistung benötigt. Das d’Alambertsche Paradoxon gilt hier nicht, da es sich eben nicht um eine *inkompressible* Strömung handelt.

4.8 Fanno-Strömung

Die Fanno-Strömung beschreibt eine *eindimensionale, stationäre, adiabat* und *reibungsbehaftete* Strömung im Rohr mit *konstantem Querschnitt*. *Adiabat* bedeutet: kein Wärmeaustausch mit der Wand. Wandreibung erzeugt jedoch trotzdem Entropie.

↪ S. 115–119

Key Formula

Bedingungen: konstanter Querschnitt, adiabat, mit Wandreibung. Daraus folgen die drei zentralen Aussagen:

$$h_0 = h + \frac{1}{2}u^2 = \text{const}, \quad T_0 = \text{const}, \quad ds > 0.$$

Die Strömung ist *nicht* isentrop, obwohl sie adiabat ist.

Die Reibung erzeugt Entropie ($ds > 0$). Die Fanno-Beziehung verknüpft Entropie- und Enthalpieänderung:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{\gamma \text{Ma}^2}{\text{Ma}^2 - 1} T \frac{ds}{dx}.$$

Das Vorzeichen des Vorfaktors hängt allein von Ma ab:

- **Unterschall:** $\text{Ma}^2 - 1 < 0$, also ist $dh < 0$. Die Enthalpie (und Temperatur) sinken. Da $h_0 = h + \frac{1}{2}u^2$ konstant bleibt, *muss* die kinetische Energie zunehmen und die Strömung wird **beschleunigt**: $u \uparrow$, $T \downarrow$, $\text{Ma} \uparrow$.
- **Überschall:** $\text{Ma}^2 - 1 > 0$, also ist $dh > 0$. Enthalpie und Temperatur steigen. Die kinetische Energie muss sinken und die Strömung wird **verlangsamt**: $u \downarrow$, $T \uparrow$, $\text{Ma} \downarrow$.

In beiden Fällen wandert der Zustand auf der Fanno-Kurve in Richtung wachsender Entropie, also auf das Entropiemaximum bei $\text{Ma} = 1$ zu.

Key Learning

Reibung treibt die Mach-Zahl stets gegen 1: **Unterschall** wird *beschleunigt* ($u \uparrow$, $T \downarrow$), **überschall** wird *verzögert* ($u \downarrow$, $T \uparrow$). Ein kontinuierlicher Wechsel vom Unter- in den überschall (oder umgekehrt) wäre nur möglich, wenn die Entropie nach dem Maximum wieder abnehmen würde, was aber den zweiten Hauptsatz verletzt. Es gibt aber die Möglichkeit eines Stosses, sodass am Ende des Rohres maximal $\text{Ma} = 1$ erreicht werden kann. Bei $\text{Ma} = 1$ ist das Rohr natürlich gesperrt (choked).

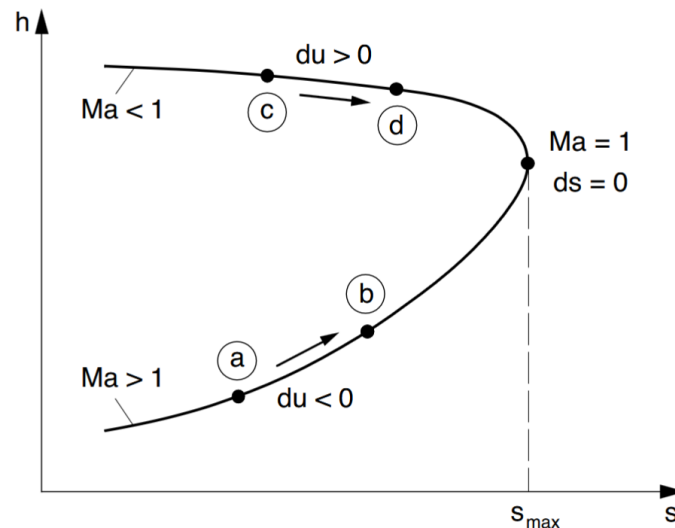


Abbildung 4.8: Fanno-Kurve im h - s -Diagramm: Reibung erzeugt Entropie und treibt sowohl Unter- als auch überschallströmungen auf den kritischen Punkt $Ma = 1$ zu.

Zustandsgrößen bezogen auf den kritischen Zustand

Analog zu den Isentropentabellen gibt es Fanno-Tabellen (Skript Anhang E), die alle Größen auf den *kritischen Zustand* (*) bei $Ma = 1$ beziehen.

↪ S. 118

Key Formula

Fanno-Beziehungen ($\gamma = 1.4$), alle Größen als Funktion von Ma :

$$\frac{T}{T^*} = \frac{\gamma + 1}{2 + \gamma - 1Ma^2}, \quad \frac{p}{p^*} = \frac{1}{Ma} \sqrt{\frac{T}{T^*}},$$

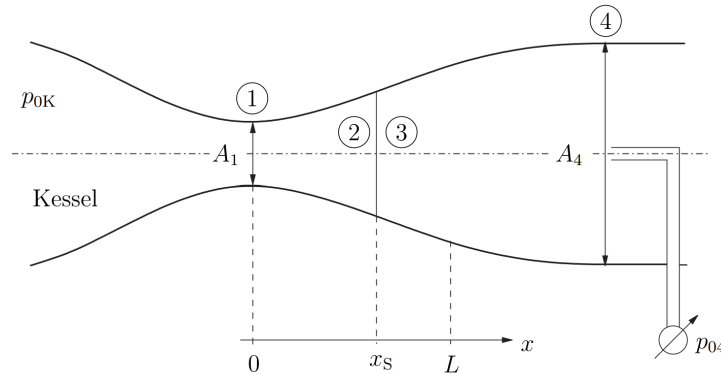
$$\frac{p_0}{p_0^*} = \frac{1}{Ma} \left[\frac{T^*}{T} \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}, \quad \frac{\varrho^*}{\varrho} = Ma \sqrt{\frac{T^*}{T}}.$$

Berechnet man p_0/p_0^* an zwei Stellen 1 und 2, so gilt: $\Delta s = -R \ln(p_{02}/p_{01}) > 0$.

Aufgabe: Fanno-Strömung (4.6)

Aufgabe 4.1 – Laval-Düse mit senkrechtem Stoss (Extra-Aufgabe 6)

Aus einem Kessel (p_{0K} , T_0) strömt Luft durch eine Laval-Düse in ein Rohr mit $A_4 = 4A_1$. Im divergenten Teil $A(x) = A_1 \left[1 + \left(\frac{9x}{8L}\right)^2\right]$, bei $x_S = \frac{2}{3}L$ ein senkrechter Stoss. Stationär, ausser über den Stoss isentrop. Ein Pitotrohr misst bei Station 4 $p_{04} = 1.5 \times 10^5$ Pa.



Bestimmen sie folgende Grössen:

- Mach-Zahl unmittelbar vor dem Stoss.
- Mach-Zahl hinter dem Stoss und Verhältnis der Ruhedichten $\frac{\varrho_{03}}{\varrho_{02}}$. Was gilt für das Ruhetemperaturverhältnis?
- Kesseldruck.
- Druck im engsten Querschnitt.
- Kritische Fläche hinter dem Stoss.
- Mach-Zahl und Druck bei Station 4.

Lösung.

- a) Am Stossort

$$A_2 = A_1 \left[1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2\right] = \frac{25}{16} A_1 = 1.563 A_1.$$

Mit dem Hals als kritischem Querschnitt ist $\frac{A_2}{A^*} = 1.563$ auf dem überschallast, also (Tabelle)

$$\text{Ma}_2 \approx 1.90.$$

- b) T_0 bleibt erhalten, deshalb ist $\frac{T_{03}}{T_{02}} = 1$. Stosstabelle bei $\text{Ma}_2 = 1.90$:

$$\text{Ma}_3 \approx 0.596, \quad \frac{\varrho_{03}}{\varrho_{02}} = \frac{p_{03}}{p_{02}} \approx 0.767.$$

- c) Isentrop zwischen Kessel und Stoss sowie Stoss und Station 4:

$$p_{04} = p_{03} \quad p_{0K} = p_{01} = p_{02}$$

$$p_{0K} = \frac{p_{04}}{0.767} = \frac{1.5 \cdot 10^5}{0.767} \approx 1.96 \text{ bar}.$$

- d) 1 ist im Hals und der kritische Querschnitt $\Rightarrow p_1 = p_*$:

$$\frac{p_*}{p_{0K}} = \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} = 0.5283$$

$$p^* = 0.5283 p_{0K} \approx 1.04 \text{ bar}.$$

e) Aus der Flächen-Mach-Beziehung bei $\text{Ma}_3 = 0.596$ folgt $\frac{A_3}{A_3^*} \approx 1.19$ mit $A_3 = A_2$

$$A_3^* = \frac{A_2}{1.19} \approx 1.31 A_1.$$

f)

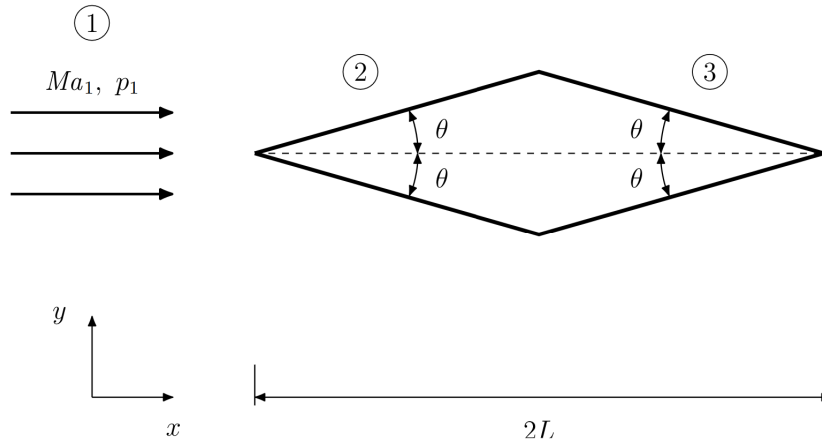
$$\frac{A_4}{A_3^*} = \frac{4A_1}{1.31 A_1} = 3.06 \quad \Rightarrow \quad \text{Ma}_4 \approx 0.20$$

$$\frac{p_4}{p_{04}}(\text{bei Ma} = 0.20) = 0.9725$$

$$p_4 = p_{04} \cdot 0.9725 = 1.5 \cdot 10^5 \cdot 0.9725 = 145\,875 \text{ Pa} = 1.46 \text{ Bar}$$

Aufgabe 4.2 – Symmetrisches Keilprofil im übershall (Prüfung FS24, Aufgabe 5)

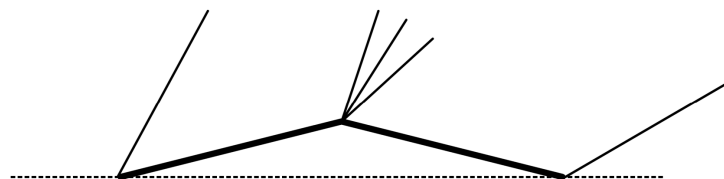
Eine ebene übershallströmung in Luft ($R = 287 \text{ J/(kg K)}$, $\gamma = 1.4$) wird durch ein symmetrisches Keilprofil mit Halbwinkel $\theta = 6^\circ$ umgelenkt. Bereich 1 ist die Anströmung, Bereich 2 hinter dem vorderen schiefen Stoss, Bereich 3 hinter dem Expansionsfächer. Gegeben: $\text{Ma}_1 = 3$, $p_1 = 10^5 \text{ Pa}$; Tabellen aus Anhang E ohne Interpolation.



- Skizzieren Sie Stösse und Fächer qualitativ.
- Mach-Zahl und Druck im Bereich 2.
- Mach-Zahl und Druck im Bereich 3.
- Entropiedifferenz zwischen Bereich 3 und Bereich 1.
- Kraft je Tiefeneinheit auf das Profil als Funktion der Länge L .

Lösung.

a)



- b) Im Stosssdiagramm für $\theta = 6^\circ$ und $\text{Ma}_1 = 3$ kann der Stosswinkel β bestimmt werden. Da wir wissen, dass $\text{Ma}_2 > 1$, wissen wir auch dass wir die schwache Lösung nehmen müssen $\rightarrow \beta = 24^\circ$. Die Normalkomponente ergibt sich damit zu $\approx \text{Ma}_{n1} = 1.220$. Damit finden wir dann in der Tabelle:

$$\text{Ma}_{n2} = 0.82999, \quad \frac{p_2}{p_1} = 1.56980.$$

$$\text{Ma}_2 = \frac{\text{Ma}_{n2}}{\sin(\beta - \theta)} = 2.686, \quad p_2 = 1.570 \text{ Bar}.$$

c)

$$\nu(\text{Ma}_2) = 43.19^\circ \quad \Delta\theta = 2 \cdot \theta = 12^\circ \Rightarrow \nu(\text{Ma}_3) = \Delta\theta + \nu(\text{Ma}_2) = 55.19^\circ$$

$$\text{Ma}_3 = 3.30$$

Für den Druck gilt $\frac{p_3}{p_2} = \frac{p_3}{p_{03}} \frac{p_{02}}{p_2}$, wobei $p_{03} = p_{02}$, wegen isentroper expansion. Die Verhältnisse können aus der Tabelle abgelesen werden:

$$\frac{p_2}{p_{02}} = 0.04429, \quad \frac{p_3}{p_{03}} = 0.01748 \implies p_3 = 0.6196 \text{ Bar}$$

d) Generell gilt hier $s_3 - s_1 = s_{03} - s_{01}$, da $s_1 = s_{01}$ wenn man isentrop verlangsamt.

$$s_3 - s_1 = -R \ln\left(\frac{p_{03}}{p_{01}}\right) = -R \ln\left(\frac{p_{02}}{p_{01}}\right).$$

Bei $\text{Ma}_{n1} = 1.22$ finden wir $\frac{p_{02}}{p_{01}} = 0.99073$

$$\implies s_3 - s_1 \approx 2.67 \text{ J/(kg K)}$$

e) Der Druck wirkt vorne (Bereich 2) und hinten (Bereich 3):

$$\frac{F_x}{b} = (p_2 - p_3) \cdot L \cdot \tan(\theta) \approx 0.0999 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} L.$$

Aufgabe 4.3 – Rampe mit Stoss und Expansion (Extra-Aufgabe 7)

Eine überschallströmung über eine Rampe mit $Ma_1 = 2$, $p_1 = 40\,000\text{ Pa}$, $\gamma = 1.4$ erfährt zuerst eine Kompression um 15° (schiefer Stoss) und danach an einer konvexen Ecke eine Expansion um 30° .

- a) Bestimmen Sie den Stossfrontwinkel grafisch.
- b) Mach-Zahl hinter dem Stoss und nach der Expansion.

Lösung.

- a) Das Stossdiagramm liefert für 15° Umlenkung und $Ma_1 = 2$ für die schwache Lösung (gegeben, weil nachher eine Expansion stattfindet)

$$\beta = 45.34^\circ.$$

- b) Normalkomponente und Mach-Zahl hinter dem Stoss:

$$Ma_{n1} = Ma_1 \cdot \sin(\beta) = 1.423, \quad Ma_{n2} = 0.7303,$$

$$Ma_2 = \frac{Ma_{n2}}{\sin(\beta - \theta)} = \frac{0.7303}{\sin 30.34^\circ} = 1.45.$$

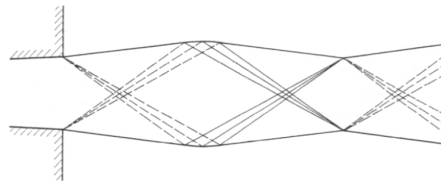
$$\nu(Ma_2 = 1.45) = 10.3^\circ. \Delta\theta = 30^\circ$$

$$\nu(Ma_3) = 40.3^\circ \Rightarrow Ma_3 = 2.55.$$

Aufgabe 4.4 – Laval-Düse mit Düsenstrahl (Prüfung FS24, MC)

Was gilt für die Strömung durch eine Laval-Düse, deren austretender Düsenstrahl unten dargestellt ist?

- (a) Die Strömung ist überexpandiert.
- (b) Der Druck am Ende der Düse ist grösser als der Umgebungsdruck.
- (c) Bei Erhöhung des Aussendruckes können Stösse in der Düse auftreten.
- (d) Die Mach-Zahl im austretenden Strahl nimmt kontinuierlich ab.



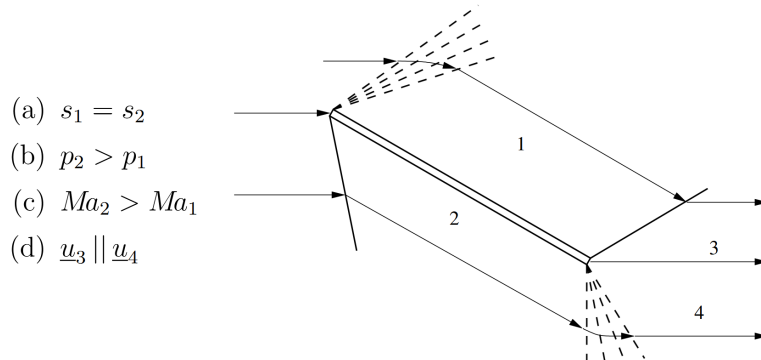
Lösung: (Skript S. 108)

Richtig: b, c

Falsch: a, d

Aufgabe 4.5 – Platte in überschallströmung (Prüfung HS18, MC)

Eine Platte befindet sich in einer überschallströmung. Was gilt in den Bereichen 1–4?



- (a) $s_1 = s_2$
- (b) $p_2 > p_1$
- (c) $Ma_2 > Ma_1$
- (d) $\underline{u}_3 \parallel \underline{u}_4$

Lösung: (Skript S. 112–114)

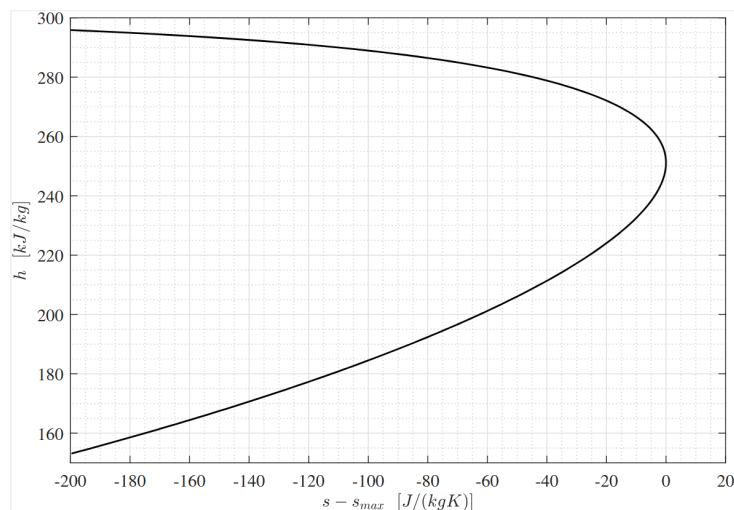
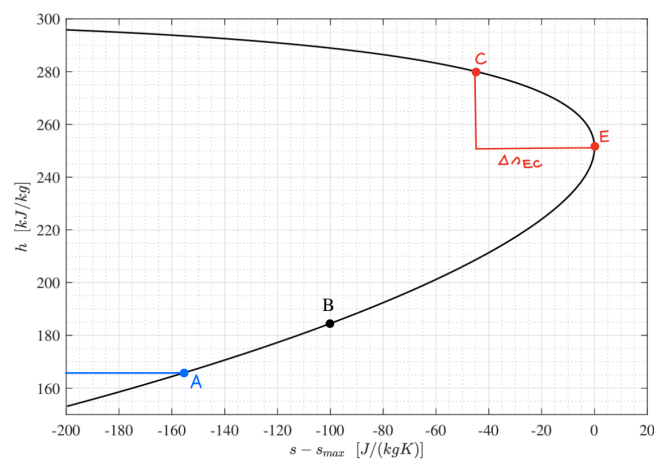
Richtig: b, d

Falsch: a, c

Aufgabe 4.6 – Fanno-Strömung mit senkrechtem Stoss (Prüfung FS2025, Aufgabe 4)

Betrachten Sie eine überschallströmung durch ein reibungsbehaftetes Rohr mit konstantem Querschnitt. Die Strömung wird als Fanno-Strömung angenommen (eindimensional, adiabat, stationär, reibungsbehaftet). An einer Stelle im Rohr tritt ein senkrechter Verdichtungsstoss auf. Die Position A markiert den Eintritt ins Rohr, E das Rohrende. B liegt gerade vor und C gerade nach dem Stoss. Luft als ideales Gas mit $R = 287 \text{ J/(kg K)}$ und $\gamma = 1.4$; verwenden Sie die Tabellen aus Anhang E mit dem nächstliegenden Wert ohne Interpolation.

- Gegeben $T_{0A} = 300 \text{ K}$ und $\text{Ma}_A = 2$: Bestimmen Sie die Enthalpie h_A an der Stelle A .
- Gegeben $p_{0C}/p_{0B} = 0.82$ und $h_C = 280 \text{ kJ/kg}$: Bestimmen Sie die Enthalpie h_B an der Stelle B .
- Die Strömung zwischen C und E ist gesperrt (*choked*). Bestimmen Sie die Entropieänderung $s_E - s_C$ aus dem Mollier-Diagramm.
- Bestimmen Sie das Druckverhältnis p_C/p_E .

**Lösung.**

- Bis zum Eintritt liegt eine isentrope überschallströmung vor. Aus der Isentropentabelle bei $\text{Ma}_A = 2$ folgt $T_A/T_{0A} = 0.5556$, also

$$T_A = 0.5556 \cdot 300 \text{ K} = 166.7 \text{ K}.$$

Mit $c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} = \frac{1.4 \cdot 287}{0.4} = 1004.5 \text{ J/(kg K)}$ ergibt sich

$$h_A = c_p T_A = 1004.5 \text{ J/(kg K)} \cdot 166.7 \text{ K} \approx 167.4 \text{ kJ/kg}.$$

- b) Über den senkrechten Stoss bleibt die Totalenthalpie erhalten, während der Totaldruck fällt: $\frac{p_{0C}}{p_{0B}} = 0.82$. Aus der Stosstabelle (Normalstoss) liefert das nächstliegende Totaldruckverhältnis $p_{0C}/p_{0B} \approx 0.8215$ das Temperaturverhältnis

$$\frac{T_C}{T_B} = 1.517.$$

Da $h = c_p T$, folgt

$$h_B = h_C \frac{T_B}{T_C} = \frac{280 \text{ kJ/kg}}{1.517} \approx 184.6 \text{ kJ/kg}.$$

- c) Nach dem Stoss liegt C auf dem Unterschallast der Fannokurve. Weil die Strömung zwischen C und E gesperrt ist, ist E der kritische Zustand ($\text{Ma} = 1$), also der Punkt maximaler Entropie auf der Fannokurve. Die Reibung treibt den Zustand von C entlang der Kurve auf diesen Punkt zu. Die Entropie nimmt dabei zu. Aus dem Mollier-Diagramm liest man die Differenz zwischen C und E ab:

$$s_E - s_C \approx 44.95 \text{ J/(kg K)}.$$

- d) Da E der kritische Zustand ist, gilt $p_E = p_*$.

$$\frac{p_{0C}}{p_{0B}} \approx 0.82151 \rightarrow \text{Ma}_C = 0.62104$$

Mit der Fanno-Beziehung aus dem Skript folgt dann

$$\frac{p_C}{p_E} = \frac{p_C}{p_*} = \frac{1}{0.62104} \sqrt{\frac{2.4}{2 + 0.4 \cdot 0.62104^2}} \approx 1.6996.$$

ANHANG A

Key Learnings

A.1 Turbulenz

Eine turbulente Strömung ist instationär, dreidimensional und rotationsbehaftet und enthält Wirbel auf vielen Längenskalen. Die Trägheit dominiert über die Reibung. Die Wirbeldiffusion ist ca. hundertmal grösser als die molekulare. Eine statistisch stationäre, isotherme Strömung wird durch Navier-Stokes und Kontinuität vollständig beschrieben. Die turbulente Viskosität ist keine Stoffkonstante. In der viskosen Unterschicht gilt das lineare, in der logarithmischen Schicht das logarithmische Wandgesetz. Turbulente Grenzschichten wachsen schneller und lösen später ab.

A.2 Potentialströmungen

Eine Potentialströmung ist drehungsfrei ($\mathbf{u} = \nabla\Phi$, Rotation ausserhalb von Singularitäten null). Mit Inkompressibilität folgt die Laplace-Gleichung. Geschwindigkeit, Potential und Stromfunktion erfüllen das Superpositionsprinzip, das Druckfeld nicht. Konforme Abbildungen sind winkeltreu und erhalten die Zirkulation. Nach d'Alembert verschwindet der Widerstand, Auftrieb ist aber möglich. Kutta-Joukowski benötigt Zirkulation und Anströmgeschwindigkeit, keine Viskosität. Eine Zirkulation um einen Zylinder verschiebt die Staupunkte, erzeugt aber weder Widerstand noch Wirbelstärke ausserhalb. Bei beschleunigten Körpern tritt die virtuelle Masse auf.

A.3 Drehungsbehaftete Strömungen

Wirbelstärke und Zirkulation sind verschieden. Wirbelstärke $\neq 0$ bedeutet nicht dass ein Wirbel existiert (z.B. Scherströmung). Jeder Wirbel hat aber Wirbelstärke. Wirbellinien sind tangential zur Wirbelstärke und enden nie im Fluid. Der Starrkörperwirbel ist drehungsbehaftet ohne Singularität, der Potentialwirbel drehungsfrei mit Singularität im Zentrum, aber beide haben dieselben Stromlinien. Zur Wirbeltransportgleichung tragen Konvektion, Diffusion und zeitliche Änderung bei, nicht aber der Druckgradient bei konstanter Dichte. Entlang Wirbelröhren herrscht konstante Zirkulation. Am endlichen Tragflügel treten Randwirbel auf, die Abwind und induzierten Widerstand hervorrufen.

A.4 Kompressible Strömungen

Die Schallgeschwindigkeit ist keine Stoffkonstante. Isentrop = reibungsfrei und stossfrei (nicht notwendig isotherm oder inkompressibel). Über einen senkrechten Stoss geht die Strömung immer in den Unterschall. Druck, Dichte, Temperatur und Entropie nehmen zu, Geschwindigkeit, Mach-Zahl und Ruhedruck ab, T_0 und die totale Enthalpie bleiben erhalten. In der Laval-Düse kann im Throat höchstens Schallgeschwindigkeit erreicht werden. Beim schiefen Stoss ist nur die Normalkomponente massgeblich. Die Prandtl-Meyer-Expansion verläuft isentrop. In reibungsfreier überschallströmung tritt ein Wellenwiderstand auf. Die Fanno-Strömung ist adiabatisch, nicht isentrop.

ANHANG B

Multiple-Choice-Fragen

Hier findet ihr sämtliche Multiple-Choice Fragen aus den Prüfungen FS24, HS18, HS18 (Repetition) und HS19 sowie aus den Übungsserien. Pro Frage können mehrere Antworten richtig sein, wobei falsch angekreuzte Antworten Punktabzug geben.

B.1 Turbulenz

(FS24) Welche charakteristischen Eigenschaften weisen turbulente Strömungen auf?

- a) Wirbelstrukturen weisen grosse Skalenunterschiede auf.
- b) Reibungseffekte dominieren gegenüber Trägheitseffekten.
- c) Wirbel diffusion und molekulare Diffusion sind von gleicher Grössenordnung.
- d) Kinetische Energie wird in Form von Reibungswärme dissipiert.

Lösung: (Skript S. 45)

Richtig: a, d

Falsch: b – die Trägheit dominiert über die Reibung, c – die Wirbel diffusion ist um Grössenordnungen grösser als die molekulare Diffusion

(FS24) Welche der folgenden Annahmen ist für ein divergenzfreies Geschwindigkeitsfeld $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ hinreichend für das Vorliegen von inkompressibler Turbulenz?

- a) $\nabla^2 \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$
- b) $\nabla \times \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$
- c) $Re > Re_{kritisch}$
- d) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) \neq 0$

Lösung: (Skript S. 45 (nur notwendige Bedingungen))

Richtig: keine (alle falsch)

Falsch: a, b – $\nabla \times \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ kennzeichnet Drehungsbehaftetheit, nicht Turbulenz, c – nur notwendige, nicht hinreichende Bedingung, d – $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) = 0$ ist eine Identität, stets erfüllt

(FS24) Welche Aussagen sind im Fall statistisch stationärer, isothermer Strömung korrekt?

- a) Die Strömung wird durch RANS-Gleichungen zusammen mit der Kontinuitätsgleichung vollständig beschrieben.
- b) Die Strömung wird durch Navier-Stokes-Gleichungen zusammen mit der Kontinuitätsgleichung vollständig beschrieben.
- c) Turbulente Schubspannungen folgen aus der Mittelung des Reibungsterms.
- d) Zeitliche Mittelung entspricht der Ensemblemittelung.

Lösung: (Skript S. 46–47)

Richtig: b, d

Falsch: a – die gemittelten Gleichungen enthalten das Schliessungsproblem, c – turbulente Schubspannungen folgen aus dem Konvektionsterm, nicht dem Reibungsterm

(FS24) Welche der Aussagen über Turbulenzmodelle treffen zu?

- a) In Scherströmungen ist die turbulente Viskosität ν_t eine Stoffkonstante.
- b) Mit dem Prandtlschen Mischungswegsansatz wird die turbulente Viskosität ν_t als Funktion des mittleren Geschwindigkeitsgradienten modelliert.
- c) Mit der Boussinesq-Annahme werden turbulente Schubspannungen als Funktion des mittleren Geschwindigkeitsgradienten modelliert.
- d) Für eine DNS ist kein Turbulenzmodell notwendig.

Lösung: (Skript S. 47–48)

Richtig: b, c, d

Falsch: a – die turbulente Viskosität hängt vom Strömungszustand ab und ist keine Stoffgrösse

(FS24, FS2025) Was gilt bei gleichen Parametern für turbulente und laminare Grenzschichten?

- a) Turbulente Grenzschichten wachsen schneller als laminare an.
- b) Die Lauflänge bis zur Ablösung ist in laminaren Grenzschichten kürzer als in turbulenten.
- c) Unmittelbar an der Wand sind die turbulenten Fluktuationen vernachlässigbar.
- d) In der viskosen Unterschicht der turbulenten Strömung sind die Schubspannungen gleich denen in der laminaren Strömung.

Lösung: (Skript S. 48–49)

Richtig: a, b, c

Falsch: d

(HS18) Für die sinnvolle Betrachtung welcher Phänomene ist $\text{rot } \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ eine Voraussetzung?

- a) Turbulenz
- b) Grenzschichten
- c) Ausbreitung von Schall
- d) Verdichtungsstösse

Lösung: (Skript S. 45, 82)

Richtig: a, b

Falsch: c, d

(FS2025) Welche charakteristischen Eigenschaften weisen turbulente Strömungen auf?

- a) Wirbelstrukturen weisen grosse Skalenunterschiede auf.
- b) Wärmeaustausch durch Wärmeleitung ist effizienter als durch Wirbeldiffusion.
- c) Reibungseffekte dominieren gegenüber Trägheitseffekten.
- d) Kinetische Energie wird vorwiegend durch grosse Wirbelstrukturen dissipiert.

Lösung: (Skript S. 45)

Richtig: a

Falsch: b – die Wirbeldiffusion ist um Grössenordnungen effizienter als die molekulare Wärmeleitung, c – die Trägheit dominiert über die Reibung, d – die Dissipation findet bei den kleinsten Wirbelskalen statt, nicht bei den grossen Strukturen

(FS2025) Welche der folgenden Annahmen ist für ein divergenzfreies Geschwindigkeitsfeld $\underline{u} = \langle \underline{u} \rangle + \underline{u}'$ **notwendig** für das Vorliegen von inkompressibler Turbulenz?

- a) $\nabla^2 \underline{u} \neq \mathbf{0}$
- b) $\nabla \times \underline{u} \neq \mathbf{0}$
- c) $Re > Re_{krit}$
- d) $\underline{u}'(\underline{x}, t) \gg \langle \underline{u}(\underline{x}, t) \rangle$

Lösung: (Skript S. 45)

Richtig: a, b, c

Falsch: d – die Schwankungen sind in der Regel kleiner als der Mittelwert. $\underline{u}' \gg \langle \underline{u} \rangle$ ist nicht notwendig

(FS2025) Welche Aussagen sind im Fall statistisch stationärer, isothermer Strömung korrekt?

- a) Die Strömung wird durch RANS-Gleichungen zusammen mit der Kontinuitätsgleichung vollständig beschrieben.
- b) Die Strömung wird durch Navier-Stokes-Gleichungen zusammen mit der Kontinuitätsgleichung vollständig beschrieben.
- c) Turbulente Schubspannungen folgen aus der Mittelung des advektiven Terms.
- d) Räumliche Mittelung entspricht der Ensemblemittelung.

Lösung: (Skript S. 46–47)

Richtig: b, c

Falsch: a – die gemittelten (RANS-)Gleichungen enthalten das Schliessungsproblem und sind nicht vollständig, d – erst die zeitliche Mittelung entspricht (unter Ergodizität) der Ensemblemittelung

(FS2025) Welche der Aussagen über die turbulente Viskosität ν_t treffen zu?

- a) In freien Scherströmungen ist ν_t grösser als die kinematische Viskosität ν .
- b) In freien Scherströmungen ist ν_t eine Stoffkonstante.
- c) In der viskosen Unterschicht ist $\nu_t \approx 0$.
- d) In wandnahen Strömungen ist ν_t keine Funktion des Wandabstands.

Lösung: (Skript S. 47–48)

Richtig: a, c

Falsch: b – ν_t hängt vom Strömungszustand ab und ist keine Stoffgrösse, d – im Mischungswegmodell hängt ν_t sehr wohl vom Wandabstand ab

(FS2025) Eine turbulente Rohrströmung hat $\text{Re}_D = 10^6$ und die relative Rauheit $k_S/D = 10^{-3}$. Welche Aussagen über den Druckabfall pro Länge $\Delta p/L$ treffen zu?

- a) Eine Erhöhung der Reynolds-Zahl Re_D hat keinen Einfluss auf $\Delta p/L$.
- b) Eine Reduktion der Viskosität ν hat keinen Einfluss auf $\Delta p/L$.
- c) Eine Verdopplung der Geschwindigkeit $\bar{U}$ vervierfacht $\Delta p/L$.
- d) Eine Verdopplung des Durchmessers D halbiert $\Delta p/L$.

Lösung: (Skript S. 50–52 (Moody))

Richtig: b, c

Falsch: a – ob $\Delta p/L$ sich ändert, hängt davon ab, wie Re_D erhöht wird, d – eine Verdopplung von D ändert auch k_S/D und damit λ , sodass sich $\Delta p/L$ nicht einfach halbiert

Die folgenden zwei Fragen beziehen sich auf eine ausgebildete, rotationssymmetrische und im Mittel stationäre turbulente Rohrströmung (Radius R), beschrieben durch die gemittelte axiale Impulsgleichung $\frac{1}{r} \partial_r(r \bar{\tau}_{rx}) = \partial_x \bar{p}$ mit der mittleren Gesamtschubspannung $\bar{\tau}_{rx}$.

(FS2025) Welchen Einfluss hat der Druckabfall durch Reibung auf die Entwicklung der mittleren Strömungsgrößen?

- a) Die mittlere axiale Geschwindigkeit $\bar{u}_x$ nimmt aufgrund der Dissipation in Hauptströmungsrichtung (x) ab.
- b) Die mittlere Gesamtschubspannung $\bar{\tau}_{rx}$ nimmt entlang der x -Achse linear ab.
- c) Die mittlere turbulente Schubspannung $\bar{\tau}_{rx}^{\text{turb}}$ bleibt konstant in x .
- d) Die mittlere Gesamtschubspannung $\bar{\tau}_{rx}$ nimmt linear in r ab.

Lösung: (Skript S. 50–51)

Richtig: c, d

Falsch: a – in einer ausgebildeten Strömung ist $\bar{u}_x$ entlang x konstant, b – $\bar{\tau}_{rx}$ hängt nicht von x ab, sondern (linear) von r

(FS2025) Welche der folgenden Randbedingungen sind für die obige radiale Impulsgleichung relevant?

- a) $\bar{\tau}_{rx}^{\text{turb}}(r = R) = 0$
- b) $\bar{u}_x(r = R) = 0$
- c) $\bar{u}_r(r = R) = 0$
- d) $\bar{\tau}_{rx}(r = R) = -\tau_W$

Lösung: (Skript S. 50–51)

Richtig: d

Falsch: a, b, c – zur Integration der Gleichung für $\bar{\tau}_{rx}$ wird nur eine Randbedingung an $\bar{\tau}_{rx}$ (die Wandschubspannung) benötigt

B.2 Potentialströmungen

(FS24, FS2025) Was gilt stets für Körperkonturen und andere Wände?

- a) Sie sind Staupunktstromlinien.
- b) Sie sind Linien, entlang denen $d\Psi = 0$ gilt.
- c) Für stationäre Strömungen gilt $\mathbf{n} \cdot \nabla\Phi|_{\text{Wand}} = 0$.
- d) Sie sind Symmetrieebenen, an denen Singularitäten gespiegelt werden.

Lösung: (Skript S. 58)

Richtig: b, c

Falsch: a, d

(FS24) Welche der folgenden Annahmen ist für ein divergenzfreies Geschwindigkeitsfeld $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ hinreichend für das Vorliegen einer inkompressiblen Potentialströmung?

- a) $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$
- b) $\nabla^2 \mathbf{u} = \mathbf{0}$
- c) $\nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$
- d) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) = 0$

Lösung: (Skript S. 55)

Richtig: a, c

Falsch: b, d

(FS24, FS2025) Welche der folgenden Aussagen stimmen für konforme Abbildungen?

- a) Sie sind winkeltreu und erhalten die Krümmung eines umströmten Profils.
- b) Die Zirkulation entlang einer geschlossenen Kurve wird erhalten.
- c) Die Joukowski-Abbildung bildet den Punkt $z = 0$ auf $|\zeta| \rightarrow \infty$ ab.
- d) Bei Joukowski-Profilen muss die Strömung an der Hinterkante glatt abfließen.

Lösung: (Skript S. 73–74)

Richtig: b, c

Falsch: a – konforme Abbildungen sind winkeltreu, aber die Krümmung kann sich ändern, d – keine Eigenschaft der Abbildung

(FS24) Was gilt für die Potentialströmung um eine geradlinig beschleunigte Kugel?

- a) $\nabla \cdot (\nabla\Phi) = 0$ gilt für alle Zeiten.
- b) Die Widerstandskraft wirkt parallel zur Beschleunigungsrichtung.
- c) Die Bernoulli-Gleichung gilt nur entlang von Stromlinien.
- d) Das Fluid hat an jedem Punkt der Körperoberfläche dieselbe Geschwindigkeit.

Lösung: (Skript S. 57, 75–76)

Richtig: a, b

Falsch: c, d

(HS18) Welche der folgenden Potentialströmungen sind ein Spezialfall der Keilströmung?

- a) Der Quadrupol.
- b) Die Quelle.
- c) Die Umströmung der Kante einer dünnen Platte.
- d) Die Parallelströmung.

Lösung: (Skript S. 64–65)

Richtig: c, d

Falsch: a, b

(HS18) Welche Größen beeinflussen den Auftrieb eines Körpers?

- a) Die Zirkulation der Strömung um den Körper.
- b) Die Dichte des Fluids.
- c) Die Druckverteilung auf der Oberfläche des Körpers.
- d) Die kinematische Viskosität des Fluids.

Lösung: (Skript S. 71–72)

Richtig: a, b, c

Falsch: d – die Viskosität geht in die Potentialtheorie nicht ein

(HS18) Welche der folgenden Annahmen sind, zusammen mit Kontinuität und $\varrho = \text{const}$, hinreichend für das Vorliegen einer inkompressiblen Potentialströmung?

- a) Es gilt $\mathbf{u} = \nabla\Phi$.
- b) Es gilt $\mathbf{u} = \text{rot } \Psi$.
- c) $\text{rot}(\nabla p) = 0$.
- d) $\text{rot } \mathbf{u} = 0$.

Lösung: (Skript S. 55)

Richtig: a, d

Falsch: b, c

(HS18) Welche Aussagen sind korrekt?

- a) Konforme Abbildungen sind Drehsinn-erhaltend, also nicht winkeltreu.
- b) Die Joukowski-Abbildung bildet den Punkt $z = 0$ auf den Punkt $\zeta = \infty$ ab.
- c) Bei einer konformen Abbildung bleibt die Zirkulation Γ der Potentialströmung erhalten.
- d) Konforme Abbildungen können einen Zylinder auf eine vertikale Platte abbilden.

Lösung: (Skript S. 73–74)

Richtig: b, c, d

Falsch: a

(HS18) Was gilt für eine Potentialströmung um einen geradlinig beschleunigten Körper?

- a) $\nabla \cdot (\nabla \Phi) = 0$ gilt für alle Zeiten.
- b) Der Körper erfährt eine Kraft parallel zur Bewegungsachse.
- c) Der Satz von Bernoulli gilt nur entlang von Stromlinien.
- d) An der Oberfläche des Körpers gilt $\mathbf{u}|_{\text{Oberfläche}} = 0$.

Lösung: (Skript S. 57, 75–76)

Richtig: a, b

Falsch: c – bei Drehungsfreiheit gilt Bernoulli im ganzen Gebiet, d – die Haftbedingung gilt nicht für Potentialströmungen

(HS18) Was gilt?

- a) $\text{rot } \mathbf{u} = \mathbf{0}$ überall ausserhalb von Singularitäten.
- b) Zirkulation $\Gamma_C = 0$ für alle Konturen C , die eine Singularität umschliessen.
- c) $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ überall ausserhalb von Singularitäten.
- d) Quellenstärke $Q_C \neq 0$ für alle Konturen C , die einen Körper umschliessen.

Lösung: (Skript S. 55, 64)

Richtig: a, c

Falsch: b, d

(HS18) Was gilt für Körperkonturen (Wände)?

- a) Es sind Linien, entlang derer Werte der Stromfunktion Ψ konstant sind.
- b) Sie werden nicht durchströmt.
- c) Es gilt $\mathbf{u}|_{\text{Wand}} = 0$.
- d) Sie erzeugen Grenzschichten.

Lösung: (Skript S. 58)

Richtig: a, b

Falsch: c, d

(HS19) Was gilt für die Stromfunktion Ψ ?

- a) $\nabla \cdot (\nabla \Psi) = 0$.
- b) Das Gradientenfeld von Ψ ist parallel zum Gradientenfeld des Potentials Φ .
- c) Der Druckgradient ist in jedem Punkt senkrecht zu den Linien $\Psi = \text{const.}$
- d) Ψ lässt sich eindeutig aus dem Geschwindigkeitsfeld bestimmen.

Lösung: (Skript S. 60–61)

Richtig: keine (alle falsch)

Falsch: a, b, c, d

(HS19) Welche der folgenden Grössen genügen dem Superpositionsprinzip?

- a) Das Geschwindigkeitsfeld.
- b) Das Druckfeld.
- c) Das Potentialfeld.
- d) Die Stromfunktion.

Lösung: (Skript S. 57)

Richtig: a, c, d

Falsch: b – der Druck hängt quadratisch von der Geschwindigkeit ab und genügt nicht dem Superpositionsprinzip

(HS19) Welche der folgenden Annahmen sind, zusammen mit Kontinuität und $\rho = \text{const}$, für sich allein hinreichend für das Vorliegen einer inkompressiblen Potentialströmung?

- a) Es gilt $\mathbf{u} = \nabla\Phi$.
- b) Es gilt $\mathbf{u} = \text{rot } \Psi$.
- c) $\text{rot}(\nabla p) = \mathbf{0}$.
- d) $\text{rot } \mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Lösung: (Skript S. 55)

Richtig: a, d

Falsch: b, c

(HS19) Die Superposition eines zusätzlichen Wirbels über eine Zylinderumströmung ...

- a) verschiebt die Staupunkte der Strömung.
- b) verändert die Druckverteilung auf der Zylinderoberfläche.
- c) modelliert eine Widerstandskraft auf den Zylinder.
- d) erzeugt Wirbelstärke in der Umströmung ausserhalb des Zylinders.

Lösung: (Skript S. 70)

Richtig: a, b

Falsch: c – es entsteht kein Widerstand (d'Alembert-Paradoxon), d – ausserhalb des Zylinders entsteht keine Wirbelstärke

(HS19) Was besagt das d'Alembert'sche Paradoxon für stationäre inkompressible Potentialströmungen?

- a) Die Kraft auf einen Körper ist eine Funktion der Geschwindigkeit.
- b) Körper erfahren keine Reibung.
- c) Körper erfahren nie eine Kraft in Richtung oder entgegengesetzt zur Anströmung.
- d) Körper erfahren nie eine Kraft in senkrechter Richtung zur Anströmung.

Lösung: (Skript S. 70–71)

Richtig: c

Falsch: a, b – das Paradoxon betrifft den fehlenden Widerstand, nicht die Reibung, d – eine Querkraft (Auftrieb) ist mit Zirkulation sehr wohl möglich

(HS19) Welche Randbedingungen werden zur Bestimmung der durch ein Profil verursachten Zirkulation genutzt?

- a) Minimierung des Widerstandes.
- b) Maximierung des Auftriebs.
- c) Keine Umströmung der Hinterkante.
- d) Der vorderste Punkt der Skelettlinie muss ein Staupunkt sein.

Lösung: (Skript S. 73 (Kutta-Bedingung))

Richtig: c

Falsch: a, b, d – die Kutta-Bedingung betrifft die Hinterkante, nicht den vorderen Staupunkt

(übungsserie) Welche der folgenden Elementarströmungen besitzen ein Geschwindigkeitsfeld, das keine Singularität im Endlichen aufweist?

- a) Quelle
- b) Keilströmung (mit $n > 1$)
- c) Keilströmung (mit $n = 1$)
- d) Keilströmung (mit $n < 1$)

Lösung: (Skript S. 64–65)

Richtig: b, c

Falsch: a, d

(übungsserie) Welche der folgenden Aussagen gelten stets entlang einer Stromlinie in einer ebenen, stationären und inkompressiblen Potentialströmung (ausserhalb von Singularitäten)?

- a) $d\Psi = 0$
- b) $|\mathbf{u}| = \text{const}$
- c) Potentiallinien verlaufen orthogonal zur Stromlinie.
- d) Die Stromlinie kann als Wand interpretiert werden.

Lösung: (Skript S. 58, 60–61)

Richtig: a, c, d

Falsch: b

(übungsserie) Für eine ebene, stationäre und inkompressible Potentialströmung gilt stets (ausserhalb von Singularitäten), dass

- a) $\nabla \cdot (\nabla \Psi) = 0$
- b) $\nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$
- c) $|\nabla p| > 0$
- d) $\nabla^2 \Phi = \nabla^2 \Psi$

Lösung: (Skript S. 61)

Richtig: a, b, d

Falsch: c

(übungsserie) Welche der folgenden Geschwindigkeitsfelder $\mathbf{u}$ beschreiben eine inkompressible Potentialströmung?

- a) $\mathbf{u} = (3, 3)^T$
- b) $\mathbf{u} = (x^3, y)^T$
- c) $\mathbf{u} = (y, -x)^T$
- d) $\mathbf{u} = (x, -y)^T$

Lösung: (Skript S. 57, 61 (Laplace + Rotationsfreiheit prüfen))

Richtig: a, d

Falsch: b, c

(FS2025) Welche der folgenden Annahmen ist für das Vorliegen einer inkompressiblen Potentialströmung **notwendig**?

- a) $\nabla \mathbf{u} = \mathbf{0}$
- b) $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$
- c) $\nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$
- d) $\nabla^2 \mathbf{u} = \mathbf{0}$

Lösung: (Skript S. 55)

Richtig: b, c, d

Falsch: a – $\nabla \mathbf{u} = \mathbf{0}$ beschreibt eine räumlich konstante (uniforme) Strömung und ist nicht notwendig

(FS2025) Welche der Aussagen gelten allgemein für Strom- und Potentialfunktionen?

- a) $\nabla \Psi \cdot \nabla \Phi = 0$
- b) $-\nabla \Psi \times \nabla \Phi = |\mathbf{u}|^2 \mathbf{e}_z$
- c) $|\nabla \Psi|^2 = |\nabla \Phi|^2$
- d) $\nabla \Phi = -\mathbf{e}_z \times \nabla \Psi$

Lösung: (Skript S. 60–61)

Richtig: a, b, c, d

Falsch:

(FS2025) Welche der Aussagen sind für das komplexe Potential $F(z) = \frac{Q}{2\pi}(\ln(z + x_a) - \ln(z - x_a))$ korrekt?

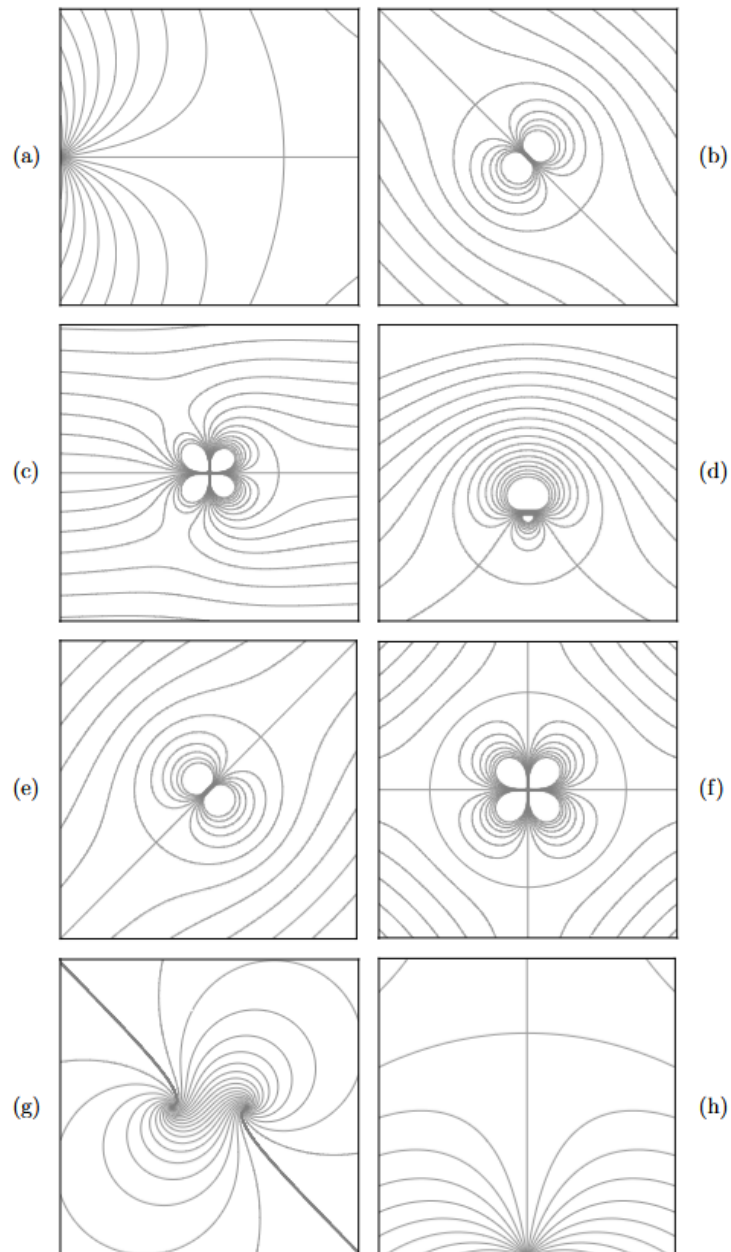
- a) $F(z)$ beschreibt eine Quelle der Stärke Q bei x_a und eine Senke bei $-x_a$.
- b) Für $x_a \rightarrow 0$ bei konstantem $Q \cdot x_a$ entspricht $F(z)$ einem Dipol.
- c) Für $x_a \rightarrow 2\pi$ wandern die Staupunkte auf den Nullpunkt zu.
- d) Multiplikation von $F(z)$ mit -1 entspricht einer Drehung des Systems um π .

Lösung: (Skript S. 62–64)

Richtig: b, d

Falsch: a – $\ln(z + x_a)$ ist eine Quelle bei $z = -x_a$, $-\ln(z - x_a)$ eine Senke bei $z = +x_a$. Quelle und Senke sind also vertauscht, c – Diese Aussage macht hier keinen Sinn, da 2π beliebig gewählt ist.

(FS2025) Welches der folgenden Bilder zeigt die Stromlinien des komplexen Potentials $F(z) = \frac{z^2}{R^2} + \frac{R^2}{z^2}$?



- a)
- b)
- c)
- d)
- e)
- f)
- g)
- h)

Lösung: (Skript S. 62–64 (Quadrupol + Staupunktströmung))

Richtig: f

Falsch: a, b, c, d, e, g, h

B.3 Drehungsbehaftete Strömungen

(FS24, FS2025) Was gilt für das Wirbelstärkefeld $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{u}$?

- a) Durch Wandreibung kann $\boldsymbol{\omega}$ erzeugt werden.
- b) Die Bedingung $\boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{0}$ ist hinreichend für das Vorliegen eines Wirbels.
- c) Wirbellinien sind für jeden Zeitpunkt tangential zu $\boldsymbol{\omega}$.
- d) In einer stationären 2D-Strömung gilt $\mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} = \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}$.

Lösung: (Skript S. 81–82, 85)

Richtig: a, c, d

Falsch: b

(FS24, FS2025) Was gilt zwangsweise in einer reibungsfreien, inkompressiblen Strömung mit einer zeitlich konstanten Zirkulation entlang einer Wirbelröhre?

- a) Die materielle Ableitung der Geschwindigkeit ist $D\mathbf{u}/Dt = 0$.
- b) Die Änderung der Wirbelstärke entlang der Wirbelröhre ist $d\omega/ds = 0$.
- c) Die Änderung der Zirkulation entlang der Wirbelröhre ist $d\Gamma/ds = 0$.
- d) Die Volumenkräfte sind konservativ, $\nabla \times \mathbf{f} = \mathbf{0}$.

Lösung: (Skript S. 87–88)

Richtig: c, d

Falsch: a, b

(FS24) Welche Aussagen treffen für einen endlich langen, geraden Tragflügel zu?

- a) Die Zirkulation der Randwirbel verursacht einen Abwind.
- b) Der Anstellwinkel des Tragflügels entspricht dem Winkel zwischen Auftriebs- und Widerstandskraft.
- c) Der induzierte Widerstand ist proportional zum Auftrieb.
- d) In Bodennähe reduziert sich der induzierte Widerstand.

Lösung: (Skript S. 90–91 (Bodeneffekt: Vorlesung))

Richtig: a, d

Falsch: b – der Anstellwinkel ist nicht der Winkel zwischen Auftrieb und Widerstand, c – der induzierte Widerstand wächst mit dem Quadrat des Auftriebsbeiwerts

(HS18) Was gilt für die von uns betrachteten, analytisch beschreibbaren Wirbel?

- a) Der Starrkörperwirbel hat keine Singularität im Definitionsbereich.
- b) Der Potentialwirbel erhält die Orientierung der Fluidelemente, während sie zirkulieren.
- c) Der Starrkörperwirbel ist drehungsfrei.
- d) Starrkörper- und Potentialwirbel erzeugen dieselben Stromlinien.

Lösung: (Skript S. 80)

Richtig: a, b, d

Falsch: c – der Starrkörperwirbel ist drehungsbehaftet ($\nabla \times \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$)

(HS18) Was ist hinreichend für das Vorliegen eines baroklinen Drehmoments?

- a) $\nabla \varrho \neq \mathbf{0}$ ist nicht parallel zu $\nabla p \neq \mathbf{0}$.
- b) Die Dichte ist nicht konstant.
- c) Es gibt einen Temperaturgradienten.
- d) Die Dichte ist nur vom Druck abhängig.

Lösung: (Skript S. 86–87)

Richtig: a

Falsch: b, c, d

(HS18) Was gilt für das Wirbelstärkefeld $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{u}$?

- a) Wenn in der Strömung Wirbel vorliegen, kann nicht im ganzen Feld $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ sein.
- b) Wenn $\boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{0}$, muss ein Wirbel vorliegen.
- c) $\text{rot } \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$.
- d) In einer 2D-Strömung ist $(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Lösung: (Skript S. 81, 85)

Richtig: a, d

Falsch: b, c

(HS18) Welche der folgenden Aussagen gelten für das Wirbelstärkefeld $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{u}$?

- a) Wirbellinien stehen senkrecht zu $\boldsymbol{\omega}$.
- b) In baroklinen Strömungen verhalten sich Wirbellinien wie materielle Linien.
- c) Wirbelfäden verlaufen parallel zu Wirbellinien.
- d) Durch lokale Erwärmung der Strömung kann $\boldsymbol{\omega}$ erzeugt werden.

Lösung: (Skript S. 82, 87–88)

Richtig: c, d

Falsch: a, b

(HS18) Welche der folgenden Terme der Navier-Stokes-Gleichungen für inkompressible Strömungen liefern einen Beitrag zu einem Term in der Wirbeltransportgleichung?

- a) Druckgradient
- b) Viskose Diffusion
- c) Nichtlineare Konvektion
- d) Zeitliche Änderung

Lösung: (Skript S. 84)

Richtig: b, c, d

Falsch: a – der Druckgradient liefert bei konstanter Dichte keinen Beitrag zur Wirbeltransportgleichung

(HS19) Welche der folgenden Terme der Navier-Stokes-Gleichungen für inkompressible Strömungen liefern einen Beitrag zu einem Term in der Wirbeltransportgleichung?

- a) Druckgradient
- b) Viskose Diffusion
- c) Nichtlineare Konvektion
- d) Zeitliche Änderung

Lösung: (Skript S. 84)

Richtig: b, c, d

Falsch: a

(HS19) Welche Phänomene treten bei einer 3D-Tragflügelströmung auf (drehungsbehaftete Strömung), nicht aber bei einer 2D-Profilumströmung (ebene Potentialströmung)?

- a) Randwirbel
- b) Induzierter Abwind am Flügel
- c) Auftrieb
- d) Induzierter Widerstand

Lösung: (Skript S. 89–91)

Richtig: a, b, d

Falsch: c

(HS19) Welche Aussagen gelten für Wirbellinien?

- a) In ebenen Grenzschichten verlaufen sie parallel zur Strömungsrichtung.
- b) In ebenen Grenzschichten verlaufen sie parallel zur Wand und senkrecht zur Strömungsrichtung.
- c) In einer ausgebildeten laminaren Rohrströmung sind sie geschlossene Kreise.
- d) Sie können im Fluid enden.

Lösung: (Skript S. 82, 87–88)

Richtig: b, c

Falsch: a, d

(HS18 Rep.) Was gilt für die von uns betrachteten, analytisch beschreibbaren Wirbel?

- a) Der Starrkörperwirbel hat keine Singularität im Definitionsbereich.
- b) Der Potentialwirbel erhält die Orientierung der Fluidelemente, während sie zirkulieren.
- c) Der Starrkörperwirbel ist drehungsfrei.
- d) Starrkörper- und Potentialwirbel erzeugen dieselben Stromlinien.
- e) Das Geschwindigkeitsfeld eines Starrkörperwirbels ist rotationsfrei.

Lösung: (Skript S. 80)

Richtig: a, b, d

Falsch: c, e

(HS18 Rep.) Welche der folgenden Terme der Wirbeltransportgleichung sind nichtlinear?

- a) Wirbelstreckung
- b) Wirbelkippen
- c) Wirbelkonvektion
- d) Wirbeldiffusion

Lösung: (Skript S. 84–85)

Richtig: a, b, c

Falsch: d

(HS18 Rep.) Welche der folgenden Aussagen gelten für das Wirbelstärkefeld $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{u}$?

- a) Wirbellinien stehen senkrecht zu $\boldsymbol{\omega}$.
- b) In baroklinen Strömungen verhalten sich Wirbellinien wie materielle Linien.
- c) Wirbelfäden verlaufen parallel zu Wirbellinien.
- d) Durch lokale Erwärmung der Strömung kann $\boldsymbol{\omega}$ erzeugt werden.

Lösung: (Skript S. 82, 87–88)

Richtig: c, d

Falsch: a, b

(übungsserie) Was gilt generell in drehungsbehafteten Strömungen?

- a) $\text{rot } \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$
- b) Superpositionsprinzip für $\mathbf{u}$
- c) Wirbelstärke $\boldsymbol{\omega} = \text{Zirkulation } \Gamma$
- d) Für $\boldsymbol{\omega}$ kann eine Transportgleichung angegeben werden.

Lösung: (Skript S. 55, 84)

Richtig: a, d

Falsch: b, c

(übungsserie) Was ist hinreichend für das Vorliegen eines baroklinen Drehmoments?

- a) An der Wand gilt die „no-slip“-Bedingung.
- b) Die Dichte ist nicht konstant.
- c) Es gibt Temperaturgradienten.
- d) $\nabla \varrho \neq \mathbf{0}$ liegt nicht parallel zu $\nabla p \neq \mathbf{0}$.

Lösung: (Skript S. 86–87)

Richtig: d

Falsch: a, b, c

(übungsserie) In der Wirbeltransportgleichung kommen die Geschwindigkeit $\mathbf{u}$ und die Rotation $\omega = \text{rot } \mathbf{u}$ vor. Welcher Term der Wirbeltransportgleichung ist nichtlinear von der Geschwindigkeit $\mathbf{u}$ abhängig?

- a) der Advektionsterm
- b) der Wirbelstreckungsterm
- c) der Diffusionsterm
- d) das barokline Drehmoment

Lösung: (Skript S. 84)

Richtig: a, b

Falsch: c, d

(übungsserie) Welcher Wirbel hat einen stetigen Verlauf der Wirbelstärke?

- a) der Rankine-Wirbel
- b) der Potentialwirbel
- c) der Starrkörperwirbel
- d) der Hillsche Kugelwirbel

Lösung: (Skript S. 80–81)

Richtig: c, d

Falsch: a – beim Rankine-Wirbel springt die Wirbelstärke am Kernrand, b – der Potentialwirbel hat eine Singularität im Zentrum

(FS2025) Welche Phänomene treten bei Modellierung durch ein Wirbelsystem, nicht aber bei einer 2D-Profilumströmung (ebene Potentialströmung) auf?

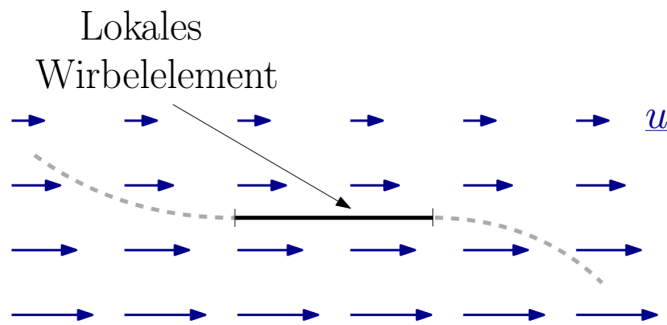
- a) Druck- und Reibungswiderstand am Flügel
- b) Induzierter Abwind am Flügel
- c) Auftrieb am Flügel
- d) Induzierter Widerstand am Flügel

Lösung: (Skript S. 89–91)

Richtig: b, d

Falsch: a, c – Auftrieb tritt auch in der 2D-Profilumströmung auf

(FS2025) Welche Aussagen treffen für das eingezeichnete lokale Wirbelement zu?



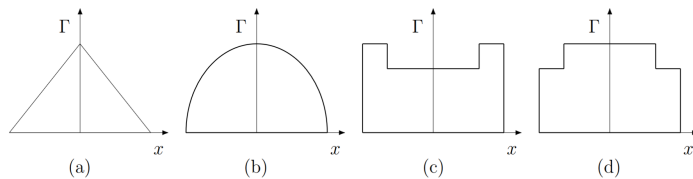
- a) Das Wirbelement kippt instantan.
- b) Das Wirbelement wird instantan gestreckt.
- c) ω bleibt lokal erhalten.
- d) Es gilt lokal $\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$.

Lösung: (Skript S. 84–85)

Richtig: d

Falsch: a, b, c

(FS2025) Welcher Verlauf der Zirkulation $\Gamma(x)$ an einem gebundenen Wirbel kann durch Überlagerung von *endlich vielen* Hufeisenwirbeln modelliert werden?



- a) Abbildung (a)
- b) Abbildung (b)
- c) Abbildung (c)
- d) Abbildung (d)

Lösung: (Skript S. 89–90)

Richtig: c, d

Falsch: a, b

(FS2025) Welche Aussagen treffen für einen endlich langen, geraden Tragflügel zu?

- a) Die Zirkulation der Randwirbel verursacht einen Abwind.
- b) Konstanter Druck entlang der Flügelkontur maximiert den induzierten Widerstand.
- c) Der Anstellwinkel des Tragflügels entspricht dem Winkel zwischen Auftriebs- und Widerstandskraft.
- d) Der induzierte Widerstand ist proportional zum Auftrieb.

Lösung: (Skript S. 89–91)

Richtig: a

Falsch: b, c, d

B.4 Kompressible Strömungen

(FS24, FS2025) Welche der folgenden Aussagen gelten allgemein?

- a) In einem variablen Dichtefeld ist die Strömung kompressibel.
- b) Die totale Enthalpie h_0 bleibt über einen Verdichtungsstoss erhalten.
- c) Reibungsfreie überschallströmung erzeugt keinen Widerstand.
- d) Plötzliche Umlenkung von überschallströmungen führt zu schrägen Stößen.

Lösung: (Skript S. 87, 105, 112, 115)

Richtig: b

Falsch: a, c, d

(FS24) Was gilt für eine Laval-Düse im gesperrten Zustand (choked flow)?

- a) $Ma = 1$ im engsten Querschnitt.
- b) Der Massenstrom kann durch Absenken des Aussendrucks erhöht werden.
- c) In der Düse muss ein Stoss auftreten.
- d) Der Massenstrom hängt von der Kesseltemperatur ab.

Lösung: (Skript S. 108)

Richtig: a, d

Falsch: b – der Massenstrom ist bereits maximal, c – im gesperrten Zustand muss kein Stoss auftreten

(FS24) Was gilt für eine Fanno-Strömung in einem Rohr mit konstantem Querschnitt?

- a) Die Unterschallströmung ist isentrop.
- b) Die Strömung ist stationär und isotherm.
- c) Die Temperatur nimmt durch Dissipation in Strömungsrichtung zu.
- d) Die Ruhetemperatur T_0 bleibt erhalten.

Lösung: (Skript S. 117–118)

Richtig: d

Falsch: a, b, c

(FS24) Was gilt für stationäre, kompressible Grenzschichten an adiabaten Wänden?

- a) Der Druck ist in wandnormaler Richtung konstant.
- b) Die Temperatur ist an der Wand maximal.
- c) Die Unterschallströmung ist isentrop.
- d) Die totale Enthalpie h_0 bleibt bei $Pr = 1$ erhalten.

Lösung: (Skript S. 115–116)

Richtig: a, b, d

Falsch: c

(HS18) Was gilt für kompressible Grenzschichten?

- a) Die Temperatur ist senkrecht zur Strömungsrichtung konstant.
- b) Kompressible Grenzschichten sind turbulent.
- c) Der Druck ist senkrecht zur Strömungsrichtung konstant.
- d) Sie können mit Hilfe der Isentropenbeziehungen beschrieben werden.

Lösung: (Skript S. 115–116)

Richtig: c

Falsch: a, b, d

(HS18) Welche der folgenden Größen nehmen über senkrechte Verdichtungsstöße ab?

- a) p_0
- b) T_0
- c) a_0
- d) ϱ_0

Lösung: (Skript S. 104–105)

Richtig: a, d

Falsch: b, c

(HS18) Welche der folgenden Strömungen sind in der Regel baroklin?

- a) Eine isentrope Strömung durch eine Laval-Düse.
- b) Die Strömung über einen warmen See eingebettet in einer kalten Umgebung.
- c) Ein schiefer Verdichtungsstoss.
- d) Eine Profilmströmung mit konstanter Dichte.
- e) Eine Prandtl-Meyer-Expansion.

Lösung: (Skript S. 86)

Richtig: b

Falsch: c, a – eine isentrope Strömung ist barotrop, d – konstante Dichte ist barotrop, e – eine Prandtl-Meyer-Expansion ist isentrop und damit barotrop

(HS18) Was gilt für eine Fanno-Strömung in einem Rohr mit konstantem Querschnitt?

- a) Die Strömung ist isentrop.
- b) Die Strömung ist adiabat.
- c) Die Strömung kann vom Unterschall in den überschall beschleunigt werden.
- d) Die totale Enthalpie $h_0 = c_p T + \frac{u^2}{2}$ bleibt erhalten.

Lösung: (Skript S. 117–118)

Richtig: b, d

Falsch: a – Reibung erzeugt Entropie, c – Reibung treibt die Mach-Zahl gegen 1

(HS18) Welche der folgenden Grössen hängen in einer isentropen Strömung eines gegebenen, idealen Gases eindeutig von der Machzahl ab (bei gegebenem γ und R)?

- a) Prandtl-Meyer-Funktion
- b) Machscher Winkel
- c) Schallgeschwindigkeit
- d) Temperatur

Lösung: (Skript S. 112–113)

Richtig: a, b

Falsch: c, d

(HS19) Welche der folgenden Annahmen sind Voraussetzungen für eine isentrope Strömung?

- a) Isothermie
- b) Reibungsfreiheit
- c) Inkompressibilität
- d) Es treten keine Verdichtungsstösse auf.

Lösung: (Skript S. 94)

Richtig: b, d

Falsch: c, a – Isentrop bedeutet hier reibungsfrei und stossfrei

(HS19) Was kann im divergenten Teil einer Laval-Düse vorliegen?

- a) Eine inkompressible Strömung.
- b) Eine überschallströmung.
- c) Eine Unterschallströmung.
- d) Ein senkrechter Verdichtungsstoss.

Lösung: (Skript S. 107–108)

Richtig: a, b, c, d

Falsch:

(HS19) Welche der folgenden Strömungen sind in der Regel baroklin?

- a) Konvektion in der Atmosphäre durch Sonneneinstrahlung.
- b) Eine isentrope Strömung durch eine Laval-Düse.
- c) Ein schiefer Verdichtungsstoss.
- d) Eine Profilmströmung mit konstanter Dichte.

Lösung: (Skript S. 86)

Richtig: a

Falsch: b, c, d

(HS19) Welche der folgenden Aussagen stimmen für den Mach'schen Winkel?

- a) Er ist vor einem schiefen Verdichtungsstoss geringer als dahinter, falls $Ma_2 > 1$.
- b) Er bleibt über einen Expansionsfächer konstant.
- c) Er ist gleich dem maximalen Umlenkwinkel $\theta_{\max}$.
- d) Er beschreibt die Ausbreitung von Schallwellen.

Lösung: (Skript S. 112)

Richtig: d

Falsch: a, b, c

(HS19) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

- a) über einen Verdichtungsstoss bleibt die Enthalpie $h = c_p T$ erhalten.
- b) Ein Flügel in einer Unterschallströmung besitzt einen Wellenwiderstand.
- c) über einen Verdichtungsstoss bleibt die totale Enthalpie $h_0 = c_p T + \frac{u^2}{2}$ erhalten.
- d) In einer Fanno-Strömung bleibt die Ruhetemperatur erhalten.

Lösung: (Skript S. 105, 115, 117–118)

Richtig: c, d

Falsch: a, b

(HS18 Rep.) Was gilt für senkrechte Verdichtungsstösse (mit Zustand „1“ vor und Zustand „2“ nach dem Stoss)?

- a) $p_{02}/\rho_{02} = p_{01}/\rho_{01}$
- b) $s_2 - s_1 = s_{02} - s_{01}$
- c) $A_{*2} = A_{*1}$
- d) $p_2/p_1 = (T_2/T_1)^{\gamma/(\gamma-1)}$

Lösung: (Skript S. 104)

Richtig: a, b

Falsch: c, d

(übungsserie) Welche der folgenden Grössen nehmen über einen senkrechten Verdichtungsstoss zu?

- a) der Ruhedruck
- b) die Temperatur
- c) die kritische Temperatur
- d) die Mach-Zahl

Lösung: (Skript S. 105)

Richtig: b

Falsch: a – der Ruhedruck nimmt über einen Stoss ab (Entropieerzeugung), c – die kritische Temperatur T^* hängt nur von T_0 ab und bleibt erhalten, d – die Mach-Zahl nimmt über einen senkrechten Stoss ab

(übungsserie) In einer Lavaldüse ...

- a) ist die Entropie stets konstant.
- b) ist reine Unterschallströmung möglich.
- c) ist im engsten Querschnitt der Düse stets $Ma = 1$.
- d) kann der Druck am Düsenende kleiner als der Umgebungsdruck sein.

Lösung: (Skript S. 107–108)

Richtig: b, d

Falsch: a, c

(übungsserie) Welche der folgenden Gleichungen muss man für die vollständige Beschreibung kompressibler Strömungen (die eventuell Stöße enthält) erfüllen?

- a) Kontinuitätsgleichung
- b) Impulsgleichungen
- c) Energiegleichung
- d) Zustandsgleichung

Lösung: (Skript S. 93)

Richtig: a, b, c, d

Falsch:

(übungsserie) Welche Aussagen treffen stets auf einen senkrechten Verdichtungsstoß zu?

- a) Die Entropie nimmt zu.
- b) $\rho_0/p_0 = \text{const}$
- c) $p_1 < p_2$
- d) $\rho_1/\rho_2 < 1$

Lösung: (Skript S. 102–105)

Richtig: a, b, c, d

Falsch:

(FS2025) Welche der folgenden Aussagen gelten allgemein für einen isentropen Stromfaden?

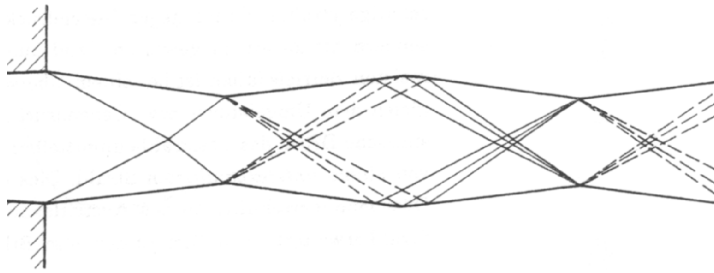
- a) Die totale Enthalpie h_0 bleibt entlang des Stromfadens erhalten.
- b) Eine überschallströmung kann nicht auf $Ma < 1$ abgebremst werden.
- c) Im Unterschall nimmt die Temperatur mit der Geschwindigkeit zu.
- d) Die kritische Dichte ρ_* bleibt entlang des Stromfadens erhalten.

Lösung: (Skript S. 94, 105)

Richtig: a, d

Falsch: b – durch Querschnittsänderung (oder einen Stoß) lässt sich überschall sehr wohl auf $Ma < 1$ verzögern, c – bei zunehmender Geschwindigkeit nimmt die statische Temperatur ab, da $h_0 = c_p T + \frac{1}{2} u^2$ konstant bleibt

(FS2025) Im Bild ist die Strömung durch eine Laval-Düse dargestellt, deren austretender Düsenstrahl unten gezeigt ist.



- a) Die Strömung ist überexpandiert.
- b) In der Düse tritt ein Stoss auf.
- c) Der Massenstrom kann durch Absenken des Aussendruckes erhöht werden.
- d) Im engsten Querschnitt erreicht die Temperatur den kritischen Wert T_* .

Lösung: (Skript S. 107–108)

Richtig: a, d

Falsch: b – die Düsenströmung selbst ist isentrop. Stösse bzw. schiefe Verdichtungen liegen erst im austretenden Strahl, c – im gesperrten Zustand ist der Massenstrom bereits maximal

(FS2025) Was gilt für schräge Stösse?

- a) Ein schwacher Stoss führt immer in den Überschall.
- b) Ein äquivalenter senkrechter Verdichtungsstoss führt immer in den Unterschall.
- c) Der Stossfrontwinkel β ist direkt proportional zur Mach-Zahl der Anströmung.
- d) Der Stossfrontwinkel β ist für die starke Lösung grösser als für die schwache.

Lösung: (Skript S. 110–112)

Richtig: b, d

Falsch: a – nahe der maximalen Umlenkung kann auch die schwache Lösung in den Unterschall führen – „immer“ ist zu stark, c – bei festem Umlenkwinkel nimmt β mit steigender Mach-Zahl ab

(FS2025) Was gilt für stationäre, kompressible, ebene Grenzschichten an adiabaten Wänden?

- a) Der Druck ist in wandnormaler Richtung konstant.
- b) Die Temperatur nimmt in Richtung der Wand zu.
- c) Unmittelbar an der Wand wird die Strömung kritisch.
- d) Die Ruhetemperatur T_0 bleibt bei $Pr = 1$ erhalten.

Lösung: (Skript S. 115–116)

Richtig: a, b, d

Falsch: c – an der Wand gilt die Haftbedingung $u = 0$, also $Ma = 0$ und nicht $Ma = 1$

ANHANG C

Clicker-Fragen

Aus der Lösung der Laplace-Gleichung (mit Randbedingungen) ...

- a) ... lässt sich ein drehungsfreies und divergenzfreies Geschwindigkeitsfeld berechnen.
- b) ... erhält man die Druckverteilung (bis auf eine additive Konstante) für eine inkompressible Potentialströmung.
- c) ... lässt sich für einen Körper eine Widerstandskraft berechnen.
- d) ... lässt sich für einen Körper eine Auftriebskraft berechnen.

Richtig: a, b

Falsch: c, d

Für inkompressible Strömungen gilt:

- a) Falls reibungsfrei, dann lassen sich Lösungen übereinanderlagern (Superpositionsprinzip).
- b) Falls reibungsfrei, dann gilt die Bernoulligleichung im ganzen Gebiet.
- c) Falls rotationsfrei, dann gilt die Bernoulligleichung im ganzen Gebiet.
- d) Die Kontinuitätsgleichung ist automatisch erfüllt, falls das Geschwindigkeitsfeld durch eine Stromfunktion ausgedrückt wird.
- e) Die Stromfunktion ist immer ein Skalarfeld.
- f) Die Stromfunktion ist immer ein Vektorfeld.

Richtig: c, d

Falsch: a, b, e, f

Was gilt für 2D inkompressible Potentialströmungen?

- a) Isopotentiallinien und Isobaren sind parallel zueinander.
- b) Isopotentiallinien und Stromlinien sind senkrecht zueinander.
- c) Die Zirkulation entlang einer geschlossenen Kurve im Gebiet ist immer null.
- d) Linienquellen und Linienwirbel sind Singularitäten.
- e) Die Differenz der Stromfunktionswerte ist gleich dem Volumenfluss zwischen den entsprechenden Stromlinien.

Richtig: b, d, e

Falsch: a, c

Komplexe Darstellung von Potentialströmungen

Welche der folgenden Aussagen zur komplexen Darstellung von Potentialströmungen treffen zu?

- a) Für jede reguläre komplexwertige Funktion gilt, dass sowohl Real- als auch Imaginärteil die Laplacegleichung erfüllen.

- b) Der Realteil eines komplexen Potentials ist die reelle Potentialfunktion.
- c) Der Realteil eines komplexen Potentials ist die Stromfunktion.
- d) Der Realteil einer komplexen Zirkulation ist die reelle Zirkulation.
- e) Der Realteil einer komplexen Zirkulation ist die Quellenstärke.

Richtig: a, b, d

Falsch: c, e

Divergenz in kartesischen Koordinaten

Was ist $\nabla \cdot \mathbf{u}$ in kartesischen Koordinaten mit $\mathbf{u} = (u, v, w)^T$ und $\mathbf{x} = (x, y, z)^T$?

- a) $\nabla \cdot \mathbf{u}$
- b) $\nabla \mathbf{u}$
- c) $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$
- d) $\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z} \right)^T$

Richtig: a, d

Falsch: b, c

Komplexe Potentiale

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- a) $F(z) = c \ln(z)$ ist das komplexe Potential eines Linienwirbels.
- b) $F(z) = c \ln(z)$ ist das komplexe Potential einer Linienquelle.
- c) $F(z) = m/z$ ist das komplexe Potential einer Parallelströmung.
- d) $F(z) = m/z$ ist das komplexe Potential eines Dipols.
- e) $F(z) = c z^n$ ist das komplexe Potential einer Keilströmung.

Richtig: a, b, d, e

Falsch: c

Singularitäten im komplexen Potential

Welche der folgenden Aussagen stimmen?

- a) $F(z) = c \ln(z + i)$ beschreibt einen Linienwirbel an der Stelle $z_0 = i$.
- b) $F(z) = c \ln(z + i)$ beschreibt eine Linienquelle an der Stelle $z_0 = i$.
- c) $F(z) = c \ln(z + i)$ beschreibt eine Linienquelle an der Stelle $z_0 = -i$.
- d) $F(z) = c \ln(z + i)$ beschreibt einen Dipol an der Stelle $z_0 = i$.

Richtig: c

Falsch: a, b, d

Zylinderumströmung als komplexes Potential

Das komplexe Potential $F(z) = c \left(e^{-i\alpha} z + \frac{e^{i\alpha}}{z} \right)$ mit $c \in \mathbb{R}$ beschreibt eine Potentialströmung ...

- a) ... um einen Kreiszylinder.
- b) ... erzeugt durch die Überlagerung einer Parallelströmung und eines Linienwirbels.
- c) ... um eine konvexe Ecke.
- d) ... um eine konkave Ecke.

Richtig: a

Falsch: b, c, d

Auftrieb am Kreiszylinder

Welche der folgenden Aussagen betreffend stationärer 2D Potentialströmungen mit bekannter konstanter Dichte sind wahr?

- a) Um den Auftrieb eines Kreiszylinders zu berechnen, muss man zuerst mit der Bernoulligleichung die Druckverteilung auf der Zylinderoberfläche berechnen.
- b) Um den Auftrieb eines Kreiszylinders zu berechnen, muss man nur die Zirkulation um den Zylinder kennen.
- c) Um den Auftrieb eines Kreiszylinders zu berechnen, muss man nur die Zirkulation um den Zylinder und die Anströmgeschwindigkeit kennen.
- d) Der Auftrieb eines rotierenden Kreiszylinders lässt sich mit der Auftriebsformel von Kutta-Joukowski berechnen.
- e) Der Widerstand eines Kreiszylinders ist positiv, falls er rotiert.

Richtig: c, d

Falsch: a, b, e

Flettner-Rotor und Magnus-Effekt

Welche der folgenden Aussagen treffen zu?

- a) Der Vorteil eines Flettnerrotors gegenüber einem herkömmlichen Segel ist, dass er auch bei Windstille Vortrieb erzeugen kann.
- b) Genauso wie der Flettnerrotor erzeugt ein herkömmliches Segel Zirkulation. Der potentielle Vorteil des Flettnerrotors besteht darin, eine grössere Zirkulation zu erzeugen, und dass kein Anstellwinkel gewählt werden muss.
- c) Beim Magnuseffekt wird die Strömung auf der Unterdruckseite in Anströmrichtung beschleunigt.
- d) Beim Magnuseffekt wird die Strömung auf der Überdruckseite in Anströmrichtung beschleunigt.

Richtig: b, c

Falsch: a, d

Auftrieb und Kutta-Bedingung

Welche der folgenden Aussagen stimmen?

- a) Mit der Potentialtheorie lässt sich der Druckwiderstand, aber wegen Vernachlässigung der Viskosität nicht der viskose Widerstand berechnen.
- b) Auftrieb eines Flügels lässt sich mit der Potentialtheorie immer relativ gut bestimmen.
- c) Auftrieb eines Flügels lässt sich mit der Potentialtheorie nur dann relativ gut bestimmen, falls die Hinterkante abgerundet ist.
- d) Auftrieb eines Flügels lässt sich mit der Potentialtheorie relativ gut bestimmen, falls der Anstellwinkel nicht zu gross ist.
- e) Die Zirkulation, die durch ein angeströmtes Flügelprofil erzeugt wird, muss die Kutta'sche Abflussbedingung erfüllen.
- f) Die Zirkulation, die durch ein angeströmtes Flügelprofil erzeugt wird, muss das d'Alembertsche Paradoxon erfüllen.

Richtig: d, e

Falsch: a, b, c, f

Konforme Abbildungen

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- a) Jede komplex differenzierbare Funktion beschreibt eine konforme Abbildung.
- b) Jede komplex differenzierbare Funktion, deren komplexe Ableitung nirgends im Gebiet null ist, beschreibt eine konforme Abbildung.
- c) Die Zirkulation entlang einer geschlossenen Kurve wird durch konforme Abbildungen nicht verändert.
- d) Die Joukowski-Abbildung eignet sich, um Potentialströmungen um Profile zu berechnen.
- e) Bei der Joukowski-Abbildung wird die Kutta'sche Abflussbedingung automatisch erfüllt.

Richtig: b, c, d

Falsch: a, e

Vektoridentitäten

Welche der Identitäten sind korrekt?

- a) $\nabla \times (\nabla \phi) = \mathbf{0}$ für alle Skalarfelder ϕ .
- b) $\nabla \cdot (\nabla \phi) = 0$ für alle Skalarfelder ϕ .
- c) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) = 0$ für alle Vektorfelder $\mathbf{u}$.
- d) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \mathbf{0}$ für alle Vektorfelder $\mathbf{u}$.
- e) $\nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0$ für alle Vektorfelder $\mathbf{u}$.

Richtig: a, c

Falsch: b, d, e

Stationäre und inkompressible Potentialströmungen

Welche der folgenden Aussagen stimmen?

- a) Auch bei instationären 2D Potentialströmungen gilt das d'Alembertsche Paradoxon.
- b) Auch bei instationären Potentialströmungen kann das Potential durch Lösen der Laplacegleichung berechnet werden.
- c) Auch bei Potentialströmungen um bewegte Körper ist die Normalenkomponente der Geschwindigkeit an den Körperoberflächen null.
- d) Das Konzept der virtuellen Masse kann bei Potentialströmungen um einen beschleunigenden Körper angewendet werden.

Richtig: b

Falsch: a, c, d

Wirbel

Drehungsbehaftete Strömungen. Welche der folgenden Aussagen über Wirbel sind wahr?

- a) Bei einem Potentialwirbel ändert sich die Orientierung von Fluidteilchen, wenn sie sich ums Zentrum bewegen.
- b) Bei einem Festkörperwirbel nimmt die Rotation mit zunehmendem Abstand vom Zentrum ab.
- c) Der Kern eines Realwirbels kann durch einen Festkörperwirbel beschrieben werden.
- d) Der Kern eines Realwirbels wird mit der Zeit grösser.
- e) In einer Grenzschicht bleibt die Orientierung von Fluidteilchen, die sich mitbewegen, erhalten.

Richtig: c, d

Falsch: a, b, e

Wirbelfäden und elektrotechnische Analogie

Welche der folgenden Aussagen stimmen?

- a) Ein Wirbelfaden entspricht einem Stromleiter in der Elektrotechnik.
- b) Ein Wirbelfaden entspricht einer B-Feldlinie in der Elektrotechnik.
- c) Eine Stromlinie entspricht einer B-Feldlinie in der Elektrotechnik.
- d) Bei bekannter Rotationsverteilung und konstanter Dichte kann das Geschwindigkeitsfeld durch Lösen einer Poissonsgleichung berechnet werden.
- e) Bei bekannter Rotationsverteilung und konstanter Dichte kann das Geschwindigkeitsfeld durch Lösen einer Laplacegleichung berechnet werden.

Richtig: a, c, d

Falsch: b, e

Biot-Savart und Wirbeltransportgleichung

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- a) Für Strömungen mit konstanter Dichte lässt sich die Stromfunktion als Lösung einer Poissonsgleichung berechnen.
- b) Mit dem Gesetz von Biot-Savart lässt sich aus einem gegebenen Geschwindigkeitsfeld die Wirbelstärke berechnen.

- c) Mit dem Gesetz von Biot-Savart lässt sich aus einem gegebenen Geschwindigkeitsfeld die Stromfunktion berechnen.
- d) Mit dem Gesetz von Biot-Savart lässt sich aus einem gegebenen Wirbelstärkefeld die Geschwindigkeit berechnen.
- e) $W = (\boldsymbol{\omega} \nabla) \cdot \mathbf{u}$ ist der Wirbelstreckungsterm.
- f) $W = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ ist der Wirbelstreckungsterm.
- g) Der Wirbelstreckungsterm verschwindet in 2D.

Richtig: a, d, f, g

Falsch: b, c, e

Wirbeltransportgleichung

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- a) Wirbelkippen entsteht durch den Konvektionsterm in der Wirbeltransportgleichung.
- b) Wirbelkippen entsteht durch den Wirbelstreckungsterm in der Wirbeltransportgleichung.
- c) Eine reibungsfreie Strömung ist immer drehungsfrei.
- d) Eine reibungsbehaftete Strömung ist immer drehungsbehaftet.
- e) In einer reibungsbehafteten Strömung entsteht Rotation an Wänden durch die Haftbedingung und diffundiert von da ins Gebiet.
- f) Eine Scherströmung ist immer drehungsbehaftet.

Richtig: b, e, f

Falsch: a, c, d

Baroklines Drehmoment

Welche der folgenden Aussagen stimmen?

- a) Ein baroklines Drehmoment herrscht, falls die Dichte ausschliesslich eine Funktion des Drucks ist.
- b) Das barokline Drehmoment ist null für isentrope ideale Gasströmungen (falls die Konzentrationen konstant sind).
- c) Das barokline Drehmoment ist null für isotherme ideale Gasströmungen (falls die Konzentrationen konstant sind).

Richtig: b, c

Falsch: a

Wirbelsätze

Welche der folgenden Aussagen über Wirbelsätze stimmen?

- a) Der Helmholtzsche Wirbelsatz sagt etwas über die Zirkulation entlang einer geschlossenen, mit der Strömung advektierten Kurve zu verschiedenen Zeitpunkten aus.
- b) Der Kelvinsche Wirbelsatz sagt etwas über die Zirkulation entlang einer geschlossenen, mit der Strömung advektierten Kurve zu verschiedenen Zeitpunkten aus.
- c) Der Helmholtzsche Wirbelsatz macht eine dynamische Aussage über die Zirkulation.
- d) Der Kelvinsche Wirbelsatz macht eine dynamische Aussage über die Zirkulation.

- e) Der Satz von Kelvin ist nur exakt für reibungsfreie barotrope Strömungen mit konservativen äusseren Kräften.
- f) Der Satz von Helmholtz gilt auch für reibungsbehaftete Strömungen mit nicht-konservativen Kräften.

Richtig: b, d, e, f

Falsch: a, c

Gradient in verschiedenen Koordinaten

Welche der folgenden Ausdrücke für den Gradienten sind korrekt?

- a) In kartesischen Koordinaten lautet der Gradient $\left(\frac{\partial a}{\partial x}, \frac{\partial a}{\partial y}, \frac{\partial a}{\partial z}\right)^T$.
- b) In Zylinderkoordinaten lautet der Gradient $\left(\frac{\partial a}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial a}{\partial \theta}, \frac{\partial a}{\partial z}\right)^T$.
- c) In Zylinderkoordinaten lautet der Gradient $\left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r a)}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial a}{\partial \theta}, \frac{\partial a}{\partial z}\right)^T$.

Richtig: a, b

Falsch: c

Tragflügel

Welche der folgenden Aussagen stimmen?

- a) Das d'Alembertsche Paradoxon gilt auch für Tragflügel.
- b) An einem geraden Tragflügel verursacht die Zirkulation entlang des Flügels einen Abwind.
- c) An einem geraden Tragflügel verursacht die Zirkulation entlang der Randwirbel einen Abwind.
- d) Wenn Sie als Pilot eines Kleinflugzeugs die Flugbahn eines Linienflugzeugs kreuzen müssen, dann ist es besser, dies auf einer Höhe etwas über dem anderen zu tun.
- e) Wenn Sie als Pilot eines Kleinflugzeugs die Flugbahn eines Linienflugzeugs kreuzen müssen, dann ist es besser, dies auf einer Höhe etwas unter dem anderen zu tun.
- f) Randwirbel eines Flugzeugs hören auf zu existieren, sobald das Flugzeug nach der Landung zum Stehen kommt.

Richtig: c, d

Falsch: a, b, e, f

Tragflügel und Bodeneffekt

Welche der folgenden Aussagen stimmen?

- a) Randwirbelfäden rollen sich auf.
- b) Randwirbel verursachen einen Widerstand.
- c) Der „Kondensstreifen“ hinter einem Flugzeug ist „Abgas“, das durch reflektiertes Sonnenlicht sichtbar wird.
- d) Der induzierte Widerstand ist bei Start und Landung kleiner als im Reiseflug.
- e) Schwäne fliegen oft knapp über der Wasseroberfläche, um den Bodeneffekt auszunutzen.

- f) Der Bodeneffekt entsteht durch teilweise Kompensation der Randwirbel und den dadurch reduzierten induzierten Widerstand.

Richtig: a, b, e, f

Falsch: c, d

Beispiele von Wirbelsystemen

Welche der folgenden Aussagen stimmen?

- a) Ein Vogel in stationärem Vorwärtsflug erzeugt Wirbelringe.
- b) Ein Winglet dient primär dazu, die Richtungsstabilität eines Flugzeugs zu verbessern.
- c) Schwäne nutzen oft den Bodeneffekt, weil dabei der Auftrieb zunimmt.
- d) Bei einem Hubschrauber bildet der Rotorrandwirbel einen geschlossenen Wirbelring.
- e) Die Bewegung eines Tornados hängt unter anderem von der selbstinduzierten Geschwindigkeit ab.

Richtig: a, e

Falsch: b, c, d

Kompressible Strömungen

Welche Aussagen stimmen?

- a) $\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u}$ gilt nur für barotrope Strömungen.
- b) Es gibt wesentliche quantitative Unterschiede zwischen kompressiblen und inkompressiblen Strömungen, qualitativ sind sie aber vergleichbar.
- c) Hyperschall und überschall bedeuten dasselbe.
- d) Der „Fussabdruck“ des Machschen Kegels ist die Linie, wo man einen überschallknall hört.
- e) Bei einem mit überschallgeschwindigkeit fliegenden Flugzeug hängt es von der Form der Nase ab, ob der Stoss anliegt oder nicht.

Richtig: d, e

Falsch: a, b, c

Isentrope Zustandsveränderungen

Welche der folgenden Aussagen stimmen?

- a) Die Bernoulli-Gleichung besagt, dass die Totalenthalpie erhalten bleibt.
- b) Die Bernoulli-Gleichung gilt immer bei reibungsfreien Strömungen.
- c) Die Ausflussformel von St. Venant und Wantzel besagt, dass die Ausströmgeschwindigkeit aus einem überdruckbehälter vom Dichteverhältnis (ausen/innen) und von der Innentemperatur abhängt (für ein spezifiziertes Gas).
- d) Die Energie-Ellipse beschreibt die Beziehung zwischen Geschwindigkeit und Temperatur als Funktion der Machzahl, der Ruhetemperatur, der maximal möglichen Ausflussgeschwindigkeit und des Adiabatenexponenten.
- e) Kompressibilitätseffekte können bis $Ma = 0.3$ immer vernachlässigt werden.

Richtig: a, b, c, d

Falsch: e

Senkrechter Verdichtungsstoss

Welche der folgenden Aussagen stimmen?

- a) Zustandsveränderungen über einen senkrechten Verdichtungsstoss können mit Hilfe der Rankine-Hugoniot-Beziehungen hergeleitet werden.
- b) Die Lavalzahl ist proportional zum Geschwindigkeitsbetrag.
- c) Die Machzahl ist proportional zum Geschwindigkeitsbetrag.
- d) Temperatur und Geschwindigkeit steigen über einen Stoss an.
- e) Die Zustandsbeziehungen für isentrope Strömungen dürfen unter keinen Umständen für überschallströmungen verwendet werden.

Richtig: a, b

Falsch: c, d, e

Divergenz in Zylinderkoordinaten

Was ist $\nabla \cdot \mathbf{u}$ in Zylinderkoordinaten mit $\mathbf{u} = (u_r, u_\theta, u_z)^T$ und $\mathbf{x} = (r, \theta, z)^T$?

- a) $\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$
- b) $\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r u_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$
- c) $\frac{1}{r} \frac{\partial(r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$
- d) $\frac{1}{r} \frac{\partial(r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{\theta} \frac{\partial(\theta u_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$
- e) $\frac{1}{r} \frac{\partial(r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r u_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$

Richtig: c

Falsch: a, b, d, e

Potentialfunktion und Stromfunktion

Sei Φ eine Potentialfunktion und Ψ eine Stromfunktion. Welche Aussagen sind korrekt?

- a) Stromlinien sind Isolinien der Stromfunktion.
- b) Potentiallinien sind in jedem Punkt senkrecht zum Geschwindigkeitsfeld.
- c) Die Strömung fließt immer von einem hohen zu einem tiefen Potential.
- d) Potentiallinien können sich im Definitionsbereich nicht kreuzen.
- e) $\mathbf{u} = \nabla^2 \Psi$
- f) Stromlinien sind in jedem Punkt senkrecht zu den Isobaren.
- g) $\nabla \Phi \times \nabla \Psi = 0$
- h) $\Phi = \operatorname{Re}(F(z)), \quad \Psi = \operatorname{Im}(F(z))$

Richtig: a, b, d, h

Falsch: c, e, f, g